

## Литература

- [1] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.П. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // Препринт 2000–1. Казанское матем. об-во. - Казань, 2000. - 50 с.
- [2] Плещинский Н.Б. К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений // Изв. вузов. Математика. - 2000. - №3. - С.39-47.
- [3] Ильинский А.С., Фоменко Е.Ю. Исследование бесконечномерных систем линейных алгебраических уравнений II рода в волноводных задачах дифракции // Ж. выч. мат. и мат. физ. - 1991. - 31, №3. - С.339-352.

Цупак А.А. (Пенза)

### Метод Галеркина для решения интегрального уравнения в задаче дифракции на локально неоднородном теле в случае $H$ -поляризации

#### 1. Уравнения Максвелла задачи дифракции.

Пусть ограниченная трехмерная область  $Q$  характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей  $\hat{\epsilon}$ ,  $\hat{\mu}$ , компоненты которых суть функции координат. Граница  $\partial Q$  области  $Q$  – кусочно-гладкая поверхность. Вне области  $Q$  параметры среды задаются скалярными константами:  $\hat{\epsilon} \equiv \epsilon_0 \hat{I}$ ,  $\hat{\mu} \equiv \mu_0 \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  – единичный тензор. Возбуждающее поле  $\{\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}\}$  гармонически зависит от времени в виде  $e^{-i\omega t}$ . Требуется определить значение полного электромагнитного поля в  $\mathbf{R}^3 \setminus \partial Q$ .

Дифференциальная формулировка поставленной задачи выглядит следующим образом: требуется определить во всем пространстве, за исключением границы  $\partial Q$ , значения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , удовлетворяющих уравнениям Максвелла, условиям излучения на бесконечности и условиям сопряжения на границе  $\partial Q$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{j}_e, \quad \vec{j}_e = -i\omega\varepsilon_0 \left( \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E} + \vec{j}^{(0)}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega\mu_0 \vec{H} - \vec{j}_m, \quad \vec{j}_m = -i\omega\mu_0 \left( \frac{\hat{\mu}}{\mu_0} - \hat{I} \right) \vec{H}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u \right) &= 0 \\ \left[ \vec{n} \times \vec{E} \right] \Big|_{\partial Q} &= \left[ \vec{n} \times \vec{H} \right] \Big|_{\partial Q} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В третьем уравнении системы  $u = E_\varphi, E_\theta$  – составляющие поля, соответствующие сферическим координатам  $\varphi$  и  $\theta$ .

## 2. Система интегро-дифференциальных уравнений задачи дифракции.

Задача (1) может быть сведена [5, Глава 2] к системе интегро-дифференциальных уравнений. Пусть в области  $Q$  значения  $\hat{\varepsilon}(\vec{x})$  и  $\hat{\mu}(\vec{x})$  отличны от соответствующих констант свободного пространства. Тогда система интегро-дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \vec{E}^{(0)}(\vec{x}) + (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q \left( \frac{\hat{\varepsilon}(\vec{y})}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E}(\vec{y}) G(r) d\vec{y} + \\ &+ i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \int_Q \left( \frac{\hat{\mu}(\vec{y})}{\mu_0} - \hat{I} \right) \vec{H}(\vec{y}) G(r) d\vec{y}, \\ \vec{H}(\vec{x}) &= \vec{H}^{(0)}(\vec{x}) + (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q \left( \frac{\hat{\mu}(\vec{y})}{\mu_0} - \hat{I} \right) \vec{H}(\vec{y}) G(r) d\vec{y} - \\ &- i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \int_Q \left( \frac{\hat{\varepsilon}(\vec{y})}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \vec{E}(\vec{y}) G(r) d\vec{y}, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $G(r) = \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r}$ ,  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ ,  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ .

### 3. Система сингулярных интегральных уравнений.

Удобно перейти от интегро-дифференциальных уравнений (2) к векторному сингулярному интегральному уравнению. Если в (2) операцию *grad div* внести под знак интеграла, то возникнет неинтегрируемая особенность  $r^{-3}$ . Однако получающиеся при этом интегралы существуют в смысле главного значения. Рассмотрим ряд дополнительных предположений относительно тензоров и полей, упрощающих исходную задачу.

Выберем такую декартову систему координат, в которой компоненты полей удовлетворяют условию  $\partial/\partial x_3 = 0$  и рассмотрим уравнения Максвелла при этих условиях.

Ограничимся случаем, когда тензоры диэлектрических и магнитных проницаемостей в выбранной системе координат имеют вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

В частности, при  $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$  и  $\mu_{ij} = \mu \delta_{ij}$ , область неоднородности является изотропной.

При такой структуре тензоров проницаемостей система уравнений Максвелла распадается на две подсистемы, решения которых не зависят друг от друга, что позволяет рассматривать отдельно задачи для  $H$ - и  $E$ -поляризованных волн. При  $H$ -поляризации  $\vec{E} = \{E_1, E_2, 0\}$ ,  $\vec{H} = \{0, 0, H_3\}$ .

Система сингулярных интегральных уравнений при условии  $\partial/\partial x_3 = 0$  также распадается на две независимые подсистемы, каждая из которых содержит в качестве неизвестных три скалярные функции и может быть использована для решения задач дифракции соответствующих поляризаций.

Число неизвестных в этой системе уменьшается за счет выбора тензоров специального вида. В случае  $H$ -поляризации при  $\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \hat{I}$  получается скалярное уравнение для компоненты  $H_3$  [5]

$$H_3(\vec{x}) - k_0^2 \int_Q \left( \frac{\mu_{33}(\vec{y})}{\mu_0} - 1 \right) H_3(\vec{y}) G(r) d\vec{y} = H_3^{(0)}(\vec{x}), \quad (4)$$

а оставшиеся компоненты полей вычисляются по формулам

$$E_i(\vec{x}) = E_i^{(0)} + i\mu\omega \int_Q (-1)^i \left( \frac{\mu_{33}(\vec{y})}{\mu_0} - 1 \right) H_3(\vec{y}) \frac{\partial G(r)}{\partial x_i} d\vec{y}, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \quad i' = 3 - i.$$

Эквивалентность полученной интегральной и исходной дифференциальной формулировок устанавливается следующей теоремой [4].

**Теорема.** Пусть область  $Q$  ограничена кусочно-гладкой поверхностью;  $\varepsilon_{ij}(\vec{x})$ ,  $\mu_{ij}(\vec{x}) \in C^{0,\lambda}(Q)$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ ;  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$ ,  $\mu = \mu_0 \hat{I}$  при  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus Q$ . Тогда любое непрерывное по Гельдеру решение системы (4)-(5) является классическим решением задачи (1). Верно и обратное.

#### 4. Уравнение Н-поляризованной волны.

Пусть теперь  $Q$  - куб  $\Pi \subset \mathbf{R}^3$  с длиной ребра  $1/k_0$  и  $\Pi_0$  - единичный куб пространства  $\mathbf{R}^3$ . Исключим из уравнения (4) явную зависимость от параметра  $\omega$ . Выполнив ряд преобразований, перейдем к уравнению

$$(I - K)f(\vec{x}) \equiv f(\vec{x}) - \int_{\Pi_0} \left( \frac{\mu_{33}}{\mu_0} - 1 \right) f(\vec{y}) \frac{e^{i|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} d\vec{y} = f_0(\vec{x}). \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые свойства преобразованного интегрального оператора  $K$ .

**Утверждение 1.** Функция  $k(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{e^{i|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}$  принадлежит пространству  $L_2[\Pi_0 \times \Pi_0]$ , причем  $\|k\|_{L_2}^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ .

**Утверждение 2.** Если функция  $k$  суммируема с квадратом, то оператор  $K$  - линейный ограниченный компактный оператор в  $L_2[\Pi_0]$  и

$$\|K\|^2 \leq \int_{\Pi_0} \int_{\Pi_0} |k(\vec{x}, \vec{y})|^2 d\vec{x} d\vec{y}.$$

Таким образом, исследуемое уравнение (6) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

### 5. Проекционный метод решения слабосингулярного интегрального уравнения.

Будем рассматривать оператор  $K$  как интегральный оператор из  $L_2[\Pi_0]$  в  $L_2[\Pi_0]$ . Выше было показано, что оператор  $K$  ограничен и компактен в этих пространствах, и, следовательно, для нахождения приближенного решения этого уравнения можно применить метод Бубнова-Галеркина с выбором одинаковых базисных и тестовых функций.

Разобьем единичные отрезки вдоль осей  $Ox, Oy, Oz$  на  $n_x, n_y$  и  $n_z$  соответственно равных частей ( $n_x, n_y, n_z$  - четные), через точки деления каждой оси проведем перпендикулярные этой оси плоскости и разобьем, таким образом, куб  $\Pi_0$  на  $n_x n_y n_z$  параллелепипедов. Точки пересечения плоскостей, лежащие в кубе  $\Pi_0$ , обозначим  $(x_i, y_j, z_k)$ .

Построим конечные базисные функции с ограниченными носителями. В качестве носителей этих функций возьмем объединение восьми параллелепипедов, имеющих общую вершину из числа точек  $(x_i, y_j, z_k)$ . При фиксированных числах  $i, j, k$  точке  $(x_i, y_j, z_k) = (i/n_x, j/n_y, k/n_z)$  соответствует параллелепипед  $\Pi_{ijk} = [x_{i-1}; x_{i+1}] \times [y_{j-1}; y_{j+1}] \times [z_{k-1}; z_{k+1}]$ . Определим на этом параллелепипеде три базисные функции

$$\varphi_{ijk}^x = \begin{cases} (x - x_{i-1})n_x, & x \in [x_{i-1}, x_i], (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \\ (x_{i+1} - x)n_x, & x \in [x_i, x_{i+1}], (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \\ 0, & (x, y, z) \notin \Pi_{ijk} \end{cases}, \quad (7)$$

$$i = 0, 1, \dots, n_x, j = 1, 3, \dots, n_y - 1, \\ k = 1, 3, \dots, n_z - 1;$$

$$\varphi_{ijk}^y = \begin{cases} (y - y_{j-1})n_y, & y \in [y_{j-1}, y_j], (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \\ (y_{j+1} - y)n_y, & y \in [y_j, y_{j+1}], (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \\ 0, & (x, y, z) \notin \Pi_{ijk} \end{cases} \quad (8)$$

$$j = 0, 1, \dots, n_y, i = 1, 3, \dots, n_x - 1, \\ k = 1, 3, \dots, n_z - 1;$$

$$\varphi_{ijk}^z = \begin{cases} (z - z_{k-1})n_z, & z \in [z_{k-1}, z_k], (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \\ (z_{k+1} - z)n_z, & z \in [z_k, z_{k+1}], (x, y, z) \in \Pi_{ijk} \\ 0, & (x, y, z) \notin \Pi_{ijk} \end{cases} \quad (9)$$

$$k = 0, 1, \dots, n_z, i = 1, 3, \dots, n_x - 1,$$

$$j = 1, 3, \dots, n_y - 1.$$

Видно, что построенные базисные функции – финитные, кусочно-линейные функции, существенно зависящие лишь от одной переменной. Носителем базисной функции с номером  $ijk$  является параллелепипед  $\Pi_{ijk}$ , вне которого она тождественно равна нулю.

Носители некоторых базисных функций не содержатся целиком в кубе  $\Pi_0$ . В этих случаях считаем, что вне куба  $\Pi_0$  базисные функции тождественно равны нулю. Введение таких функций – “полукрышек” обязательно, ибо в противном случае всякое приближенное решение, разыскиваемое в соответствии с методом Галеркина в виде линейной комбинации базисных функций, априори равнялось бы нулю на всех гранях куба.

Введем общую нумерацию базисных функций, выписав одну за другой все функции  $\varphi^x$ ,  $\varphi^y$  и  $\varphi^z$  и переобозначив их  $u_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . При заданных значениях  $n_x, n_y, n_z$

$$N = [(n_x + 1)n_y n_z + (n_y + 1)n_x n_z + (n_z + 1)n_x n_y] / 4.$$

Система функций  $\{u_k\}$  линейно независима. Положим  $X_n = \text{span}\{u_1, \dots, u_N\}$ .

Отметим, что выполняется условие аппроксимации функций из  $L_2$  элементами подпространств  $X_n$ , а именно верно

**Утверждение 3.** Если  $f \in L_2[\Pi_0]$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N, c_k \quad \left\| f - \sum_{k=1}^N c_k u_k \right\| < \varepsilon.$$

Приближенное решение  $\tilde{u}$  уравнения (6) будем искать в виде

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_k u_k, \quad (10)$$

искомые коэффициенты  $c_k$  найдем из уравнений Галеркина

$$\sum_{k=1}^n c_k (u_k - K u_k, u_j) = (f_0, u_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$a_{jk} = \int_{\Pi_0} u_j(\vec{x}) u_k(\vec{x}) d\vec{x} - \int_{\Pi_0} \int_{\Pi_0} \left( \frac{\mu_{33}}{\mu_0} - 1 \right) \frac{e^{i|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} u_j(\vec{x}) u_k(\vec{y}) d\vec{x} d\vec{y},$$

$$b_j = \int_{\Pi_0} u_j(\vec{x}) f_0(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Так как все условия теоремы о сходимости проекционного метода для уравнения второго рода выполнены (оператор  $K$  компактен,  $I - K$  инъективен, а подпространства  $X_N$  предельно плотны в  $L_2[\Pi_0]$ ), то метод Бубнова-Галеркина в пространствах  $L_2[\Pi_0]$  с выбранными базисными функциями сходится.

### 6. Построение диаграмм направленности.

Для проверки работы численного алгоритма построены диаграммы направленности. К этому методу часто прибегают в тех случаях, когда построить модельные задачи и найти их аналитические решения или очень затруднительно, или вообще невозможно. Опишем процедуру построения диаграммы направленности для решения задачи дифракции  $H$ -поляризованной волны при  $\hat{\epsilon} = \epsilon_0 I$  и  $\hat{\mu} = \mu_0 I$ .

Компоненты полей находятся из уравнений

$$H_3(\vec{x}) - \int_{\Pi_0} \left( \frac{\mu_{33}}{\mu_0} - 1 \right) H_3(\vec{y}) G(r) d\vec{y} = H_3^{(0)}(\vec{x}),$$

$$E_i(\vec{x}) = E_i^{(0)} + i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_{\Pi_0} (-1)^i \left( \frac{\mu_{33}}{\mu_0} - 1 \right) H_3(\vec{y}) \frac{\partial G(r)}{\partial x_{i'}} d\vec{y}, \quad (12)$$

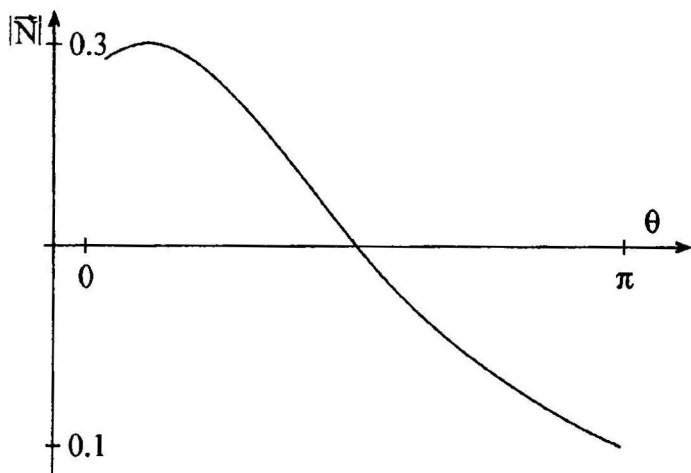
$$i = 1, 2, \quad i' = 3 - i,$$

где

$$G(r) = \frac{e^{i|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}, \quad \frac{\partial G(r)}{\partial x_{i'}} = (x_{i'} - y_{i'}) (i|\vec{x}-\vec{y}| - 1) \frac{e^{i|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}.$$

Токи поляризации выражаются через компоненты поля

$$\vec{J}^{(e)} = \left( \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_0} - I \right) \vec{E}, \quad \vec{J}^{(m)} = \left( \frac{\hat{\mu}}{\mu_0} - I \right) \vec{H}. \quad (13)$$



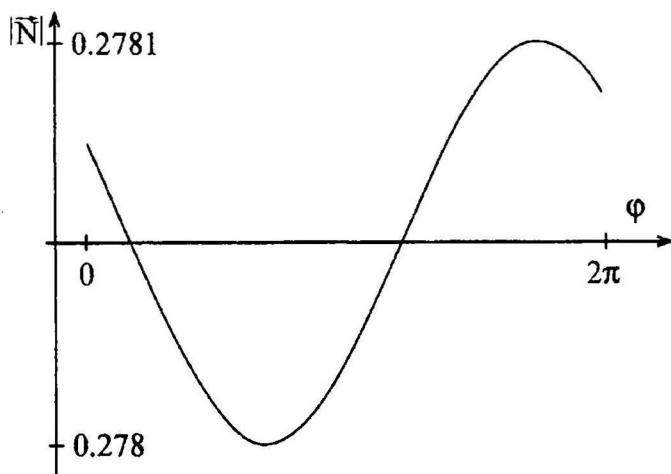
Пусть точка наблюдения  $(x_1, x_2, x_3)$  имеет сферические координаты  $(\rho_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \rho_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \rho_0 \cos \theta_0)$ . Обозначим  $\vec{x}_0 = \frac{1}{\rho_0} \vec{x} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ . Пусть  $\{k, l, n\}$  являются циклическими перестановками тройки  $\{1, 2, 3\}$ . Тогда компоненты диаграммы направленности  $\vec{N}(\theta_0, \varphi_0)$  вычисляются по формулам

$$N_k(\theta_0, \varphi_0) = \int_{\Omega_0} \frac{e^{i(\vec{y} \cdot \vec{x}_0)}}{4\pi} \left\{ \sum_{p=1}^3 (\delta_{kp} - \psi_k(\theta_0, \varphi_0) \psi_p(\theta_0, \varphi_0)) J_p^{(e)}(\vec{y}) + \right. \\ \left. + J_l^{(m)}(\vec{y}) \psi_n(\theta_0, \varphi_0) - J_n^{(m)}(\vec{y}) \psi_l(\theta_0, \varphi_0) \right\} d\vec{y}, \quad (14)$$

где  $\delta_{kp}$  – символ Кронекера, а  $J_p^{(e)}(\vec{y})$ ,  $J_l^{(m)}$  – компоненты электрического и магнитного токов поляризации.

Известно [4], что в удаленной зоне (при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ ) имеет место представление электрической составляющей поля  $\vec{E}(\rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{e^{i\rho_0}}{4\pi\rho_0} \vec{N}(\varphi_0, \rho_0) + O(\rho_0^{-2})$ .

На рисунках представлены графики функции  $|\vec{N}|$  при фиксированных значениях переменных  $\varphi_0$  и  $\theta_0$  соответственно.



## Литература

- [1] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.
- [2] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996.
- [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
- [4] Капустин Ю.Ю. Сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции на неоднородных телах. // Автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. н. – М., 1999.
- [5] Самохин А.В. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. – М.: Радио и связь, 1998.
- [6] Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза: Изд-во ПГТУ, 1997.