

Гусенкова А.А. (Казань)

Сравнение задач дифракции электромагнитной волны на ленте и упругой волны на дефекте

Рассмотрены задачи дифракции гармонической ТЕ-волны на идеально проводящей бесконечно тонкой металлической ленте, размещенной на границе раздела двух однородных изотропных диэлектрических сред, и задачи дифракции упругой гармонической волны на дефекте (разрезе или тонком включении), расположенном на границе раздела двух однородных изотропных упругих сред, в случае двумерного поля. Формулировки и методы решения задач даны в сравнении. Показано, что наиболее близкими являются задачи дифракции, в которых количество типов волн, распространяющихся в среде, совпадает.

1. Постановки задач. В данной работе будем рассматривать задачи дифракции гармонической ТЕ-волны на идеально проводящей бесконечно тонкой металлической ленте $\{z = 0, \alpha < x < \beta\}$, размещенной на границе раздела двух однородных изотропных диэлектрических сред, и задачи дифракции упругой гармонической волны на дефекте (разрезе или тонком включении) $\{z = 0, \alpha < x < \beta\}$, расположенном на границе раздела двух однородных изотропных упругих сред. Предположим, что объемные силы отсутствуют. Рассмотрим плоскую задачу, когда поле двумерное ($\partial/\partial y = 0$), опуская временной множитель e^{-ikt} . Падающее поле задано при $z > 0$ и при $z < 0$. Будем искать поле, возникающее при дифракции ТЕ-волны и упругой волны соответственно на ленте и на дефекте.

Задачи дифракции в случае электромагнитной и упругой сред можно рассматривать с единой математической точки зрения, не смотря на различия физической природы. Для решения задач дифракции будем использовать метод преобразования Фурье в классе S' .

2. Задачи дифракции в случае одного типа волн. Как известно (см., например, [1]), в однородной изотропной диэлектрической среде и при антиплоской деформации в однородной изотропной упругой среде существует один тип волн. Поэтому

рассмотрим сначала плоскую задачу дифракции ТЕ-волны на ленте и антиплоскую задачу дифракции упругой волны на дефекте.

В случае антиплоской деформации при сделанных предположениях для единственной отличной от нуля компоненты $w(\cdot, \cdot)$ вектора смещений имеем уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2(z)w = 0, \quad k(z) = \{k_+, z > 0; k_-, z < 0\}. \quad (1)$$

Для решения задачи дифракции необходимо найти решение уравнения Гельмгольца (1) при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе \tilde{S}' уходящих от прямой $z = 0$ в полуплоскости $\{z > 0\}$ и $\{z < 0\}$ решений [2], удовлетворяющее условиям сопряжения на границе раздела сред

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z}(x, 0 \pm 0) + \frac{\partial w_0}{\partial z}(x, 0 \pm 0) = 0, \quad x \in (\alpha, \beta), \\ [w(x, z)]|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad x \notin [\alpha, \beta], \end{aligned} \quad (2)$$

где $w_0(\cdot, \cdot)$ - падающая волна,

$$\begin{aligned} [w(x, z)]|_{z=0} = w(x, 0 + 0) - w(x, 0 - 0), \\ \left[\frac{\partial w}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial z}(x, 0 + 0) - \frac{\partial w}{\partial z}(x, 0 - 0). \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти поле, возникающее при дифракции упругой волны на дефекте, необходимо рассмотреть две вспомогательные задачи [2], [3]: задачу Коши для уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = 0, \quad k > 0, \quad k \in R \quad (3)$$

в полуплоскости $\{z > 0\}$ с граничными условиями

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial z}(x, 0) = w_1(x), \quad x \in R$$

и задачу о скачке для уравнения Гельмгольца (1) с условиями

$$[w(x, z)]|_{z=0} = a(x), \quad \left[\frac{\partial w}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} = b(x), \quad x \in R.$$

Можно получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче дифракции упругой гармонической волны на дефекте в случае антиплоской деформации

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{+}(\xi)\gamma_{-}(\xi)}{\gamma_{+}(\xi) + \gamma_{-}(\xi)} e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = -\frac{\partial w_0}{\partial z}(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (4)$$

$$\gamma_{\pm}(\xi) = \{|\xi| \geq k_{\pm} : +i\sqrt{\xi^2 - k_{\pm}^2}; \quad |\xi| < k_{\pm} : -\sqrt{k_{\pm}^2 - \xi^2}\},$$

в предположении, что $\frac{\partial w_0}{\partial z}(x, 0 \pm 0) = \frac{\partial w_0}{\partial z}(x, 0)$, $x \in (\alpha, \beta)$. Знак "+" относится к области $z > 0$, знак "-" - к области $z < 0$.

Тогда поле, возникающее при дифракции упругой волны на дефекте, определяется равенством

$$w_{\pm}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm\gamma_{\mp}(\xi)}{\gamma_{+}(\xi) + \gamma_{-}(\xi)} e^{\pm iz\gamma_{\pm}(\xi) + i\xi(t-x)} d\xi dt.$$

В случае электромагнитной среды при сделанных предположениях будем искать решение уравнения Гельмгольца (3) при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе \tilde{S}' , удовлетворяющее условиям сопряжения (2) и

$$w(x, 0 \pm 0) + w_0(x, 0 \pm 0) = 0, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Задача дифракции ТЕ-волны на металлической ленте решается аналогично рассмотренной задаче дифракции упругой волны на дефекте. Эквивалентное задаче интегральное уравнение, подобное (4), получено в [2].

2. Задачи дифракции в случае двух типов волн. Как известно, в однородной изотропной упругой среде в общем случае существует два типа волн. Колебательные процессы в упругой среде протекают сложнее, чем в электромагнитной среде и сопровождаются взаимным преобразованием продольных и поперечных волн друг в друга, если тело имеет границу.

В случае плоской деформации отличные от нуля компоненты $u(\cdot, \cdot)$, $v(\cdot, \cdot)$ вектора смещений определяются продольным и поперечным потенциалами $\varphi(\cdot, \cdot)$ и $\psi(\cdot, \cdot)$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Пусть на дефект, расположенный вдоль отрезка вещественной оси в однородной изотропной упругой среде, падает упругая гармоническая волна с потенциалами $\varphi_0(\cdot, \cdot)$, $\psi_0(\cdot, \cdot)$. Пусть дефект является жестким и вставлен в упругую среду без трения. В этом случае граничные условия для потенциалов разделяются [5].

Для решения плоской задачи дифракции необходимо найти решения уравнений Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_2^2 \psi = 0$$

при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе уходящих от прямой $z = 0$ в полуплоскости $\{z > 0\}$ и $\{z < 0\}$ решений, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, 0 \pm 0) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(x, 0 \pm 0) &= 0, \\ \psi(x, 0 \pm 0) + \psi_0(x, 0 \pm 0) &= 0, \quad x \in (\alpha, \beta), \\ [\varphi(x, z)]|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} &= 0, \\ [\psi(x, z)]|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} &= 0, \quad x \notin [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(x, 0 \pm 0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(x, 0), \quad \psi_0(x, 0 \pm 0) = \psi_0(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Задача для продольного потенциала $\varphi(\cdot, \cdot)$ полностью совпадает с антиплоской задачей дифракции в случае одинаковых сред, а задача для поперечного потенциала $\psi(\cdot, \cdot)$ решается аналогично. Можно показать, что плоская задача дифракции упругой гармонической волны на дефекте в случае одинаковых сред эквивалентна двум интегральным уравнениям

$$\frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(\xi) e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

$$\frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} b(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_2(\xi)} e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = \psi_0(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

где

$$\gamma_j(\xi) = \{|\xi| \geq k_j : +i\sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \quad |\xi| < k_j : -\sqrt{k_j^2 - \xi^2}\}, \quad j = 1, 2.$$

При этом продольный и поперечный потенциалы определяются формулами

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial z}(x, z) = \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1(\xi) e^{\pm iz\gamma_1(\xi) + i(t-x)\xi} d\xi dt,$$

$$\psi_{\pm}(x, z) = -\frac{i}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} b(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_2(\xi)} e^{\pm iz\gamma_2(\xi) + i(t-x)\xi} d\xi dt.$$

Интегральные уравнения, эквивалентные задаче дифракции, подобны полученным в [4] уравнениям задачи дифракции электромагнитной волны на незамкнутых плоских цилиндрических экранах, расположенных в одной плоскости.

Рассмотрим плоскую задачу дифракции упругой гармонической волны на дефекте в случае различных сред. Граничные условия для продольного и поперечного потенциалов не разделяются, поэтому удобнее использовать постановку задачи в смещениях.

Для решения задачи дифракции необходимо найти решение уравнений Ламе

$$(\lambda(z) + 2\mu(z)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda(z) + \mu(z)) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \mu(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho(z) k^2(z) u = 0,$$

$$\mu(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda(z) + \mu(z)) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (\lambda(z) + 2\mu(z)) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho(z) k^2(z) v = 0,$$

где $u(\cdot, \cdot)$, $v(\cdot, \cdot)$ – компоненты смещения, $k(z) = \{k_+, z > 0; k_-, z < 0\}$, постоянные Ламе $\lambda(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ и плотность тела $\rho(\cdot)$ определяются аналогично $k(\cdot)$, при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе S' , удовлетворяющее условиям сопряжения

$$u(x, 0 \pm 0) + u_0(x, 0 \pm 0) = 0, \quad v(x, 0 \pm 0) + v_0(x, 0 \pm 0) = 0, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned}
[u(x, z)]|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} = 0, \\
[v(x, z)]|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial z}(x, z) \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad x \notin [\alpha, \beta],
\end{aligned}$$

где $u(\cdot, \cdot)$, $v(\cdot, \cdot)$ определяют падающее поле.

Два интегральных уравнения, эквивалентных плоской задаче дифракции упругой гармонической волны на дефекте, получены в [3] методом, использованным нами для решения задачи дифракции в случае антиплоской деформации. Значительно проще интегральные уравнения выглядят в случае одинаковых сред. Доказана

Теорема 1. *Плоская задача дифракции упругой гармонической волны на дефекте в случае одинаковых сред (граничные условия для продольного и поперечного потенциалов не разделяются) эквивалентна двум интегральным уравнениям*

$$\begin{aligned}
\frac{i}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_{\alpha}^{\beta} b_u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mu}{\gamma_2(\xi)} + \frac{\lambda + \mu}{\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi)} \right) e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = \\
= u_0(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta), \\
\frac{i}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\mu \pm (\lambda + 2\mu) \frac{\gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi)}) \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi))} b_v(t) + \right. \\
\left. + \frac{1}{\xi} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\gamma_2(\xi)}{\gamma_1(\xi)} + \mu \frac{1 \pm 1}{2} \right) b_u(t) \right] e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = v_0(x, 0), \quad x \in (\alpha, \beta),
\end{aligned}$$

где $b_u(\cdot)$, $b_v(\cdot)$ - искомые функции,

$$\gamma_j(\xi) = \{ |\xi| \geq k_j : +i\sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \quad |\xi| < k_j : -\sqrt{k_j^2 - \xi^2} \}, \quad j = 1, 2.$$

В [6] интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах статических задач плоской теории упругости для тел с дефектами численно решены методом Бубнова-Галеркина. Этот метод также можно использовать для решения задач дифракции, интегральные уравнения которых имеют логарифмические особенности в ядрах.

Заметим, что если в электромагнитной среде существуют точки с идентичными физическими характеристиками, то в случае упругой среды, ввиду существования двух типов волн, это справедливо только при некотором условии [1]. Как известно, в теории Максвелла нет продольных волн, а для поперечных волн имеет место поляризация: рассматривают ТЕ- и ТМ-поляризованные волны. Для поперечных волн в упругой среде различают горизонтальную и вертикальную поляризации: рассматривают соответственно SH- и SV-волны. SH-волны в случае антиплоской деформации в теории упругости могут быть рассмотрены как аналоги ТЕ-волн в электродинамике.

В случае однородной анизотропной электромагнитной или упругой среды задача усложняется. Это связано с увеличением количества типов волн в среде. Наиболее близкими являются задачи дифракции в случае электромагнитной и упругой сред, в которых количество типов волн совпадает.

Литература

- [1] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981.
- [2] Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications // *Advances in Equations and Inequalities* (A.E.I.) (ed. J.M. Rassias). – Athens, Greece, 1999.
- [3] Гусенкова А.А. Плоская задача дифракции упругой волны на дефекте (готовится к печати).
- [4] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996.
- [5] Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция упругих волн. – М.: Изд-во МГУ, 1992. 208 с.
- [6] Гусенкова А.А., Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах граничных задач плоской теории упругости для областей с дефектом // ПММ. – 2000. – Т. 64, Вып. 3. – С.454–461.