

Плещинский Н.Б. (Казань)

Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей

Метод интегральных преобразований широко применяется при решении задач математической физики, его значение трудно преувеличить. Имеется множество публикаций, статей и монографий, посвященных решению конкретных задач и обоснованию метода в целом.

В монографиях [1] и [2] получены решения ряда ключевых задач электродинамики классическим методом преобразования Фурье и близкими к нему методами. Как отмечено в предисловии редактора перевода к книге [2], в некоторых случаях изложение не вполне строгое. Анализ публикаций последних лет показывает, что при решении задач электродинамики переход к интегральным преобразованиям в пространствах обобщенных функций позволяет обосновать многие действия, которые раньше были оправданы скорее физической интуицией, чем математическими доказательствами. Особо отметим монографию [3], где дано полное исследование задач дифракции электромагнитных волн на металлических экранах на основе теории псевдодифференциальных операторов.

В книге [4] метод преобразования Фурье используется при сведении широкого круга граничных задач математической физики к краевым задачам для аналитических функций. Сужение классов заданных и искомых функций ради доступности изложения не дало возможности рассматривать решения типа распространяющихся волн. Тем не менее, расширение метода на классы распределений подготовлено: последняя глава посвящена уравнениям в пространствах обобщенных функций.

В лекции обсуждается ряд вопросов, связанных с применением интегрального преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей. Рассмотрены некоторые ключевые задачи электродинамики. Основное внимание уделено выводу интегральных и сумматорных представлений решений уравне-

ния Гельмгольца и системы Максвелла, основанному на решении вспомогательных задач Коши, а также технике перехода от исходных задач электродинамики к эквивалентным интегральным уравнениям.

Приняты следующие обозначения. Переменные x, y, z при преобразовании Фурье переходят в переменные ξ, η, ζ , при этом функции (распределения) и их образы Фурье обозначаются одинаково. Точка над обозначением переменной показывает, что эта вещественная переменная продолжена в комплексную область.

При подготовке лекции использованы работы [5]–[13].

1. Введение

Обсудим предварительно некоторые детали, связанные с применением метода интегральных преобразований в задачах электродинамики.

1.1. Интегральное преобразование Фурье.

Пусть *интегральное преобразование Фурье* определено формулой [22]

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix\xi} dx,$$

для такого преобразования имеют место *формула обращения*

$$\mathcal{F}^{-1} : F(\xi) \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$

и *формула коммутации* с операторами

$$\mathcal{D} : f(x) \mapsto f'(x); \quad \mathcal{M} : F(\xi) \mapsto i\xi F(\xi).$$

Преобразование Фурье имеет глубокий математический и физический смысл: практически любую функцию можно представить в виде линейной комбинации простых функций вида $e^{ix\xi}$. Такие функции принято называть элементарными волнами или *гармониками*.

После того, как были исследованы свойства интеграла Фурье при комплексных значениях параметра ξ , стало возможным принять метод преобразования Фурье при решении краевых задач для дифференциальных уравнений в классах функций, не обращающихся в нуль на бесконечности. Фундаментальное значение имеет теорема Винера-Пэли ([23], [2] и [1]), в соответствии с которой образы Фурье односторонних функций из L_2 являются аналитическими в соответствующих полуплоскостях функциями.

В теории распределений имеет место аналогичное утверждение [14]: если аналитическая по $z = x + iy$ в трубчатой области функция $f(z)$ имеет ограниченный рост по переменной y , то ее предел при $y \rightarrow 0$ в смысле слабой сходимости в пространстве распределений является распределением на оси $\text{Im } z = 0$. Для нас в дальнейшем исключительно важным будет обратное утверждение: распределение медленного роста на бесконечности может быть аналитически продолжено с вещественной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость, если его носитель принадлежит положительной или отрицательной полуоси соответственно.

Найдем образы Фурье нескольких односторонних функций. Пусть a - комплексное число, $\text{Re } a > 0$. Легко проверить, что если

$$f(x) = \{e^{-ax}, x > 0; 0, x < 0\},$$

то

$$F(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi + ia}$$

и если

$$f(x) = \{0, x > 0; e^{+ax}, x < 0\},$$

то

$$F(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{\xi - ia}.$$

Пусть a - вещественное число. Если

$$f(x) = \{e^{iax}, x > 0; 0, x < 0\},$$

то

$$F(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi + a + i0}$$

и если

$$f(x) = \{0, x > 0; e^{iax}, x < 0\},$$

то

$$F(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{\xi + a - i0}.$$

Эти формулы можно получить так: умножить функцию $f(x)$ на $e^{-\varepsilon x}$ (или на $e^{+\varepsilon x}$), вычислить образ Фурье и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ (в смысле сходимости в пространстве распределений).

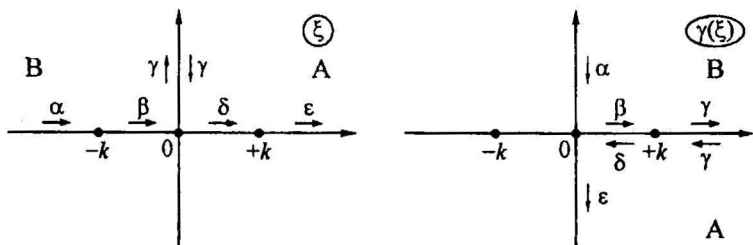
1.2. Соглашение о квадратном корне.

Договоримся, как понимать выражение

$$\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2} = \sqrt{(k - \xi)(\xi + k)}$$

при комплексных в общем случае значениях переменной ξ . Пусть пока k — вещественное положительное число. Чтобы выделить однозначную ветвь аналитической функции, проведем разрез комплексной плоскости, соединяющий точки ветвления $-k$ и $+k$ по отрезку вещественной оси $[-k, +k]$. Будем считать, что при извлечении корня из комплексного числа извлекается корень из его модуля, а аргумент делится пополам. Тогда, чтобы вычислить значение функции $\gamma(\xi)$, нужно определить значения аргументов сомножителей $k - \xi$ и $\xi + k = \xi - (-k)$.

Пусть на положительной мнимой полуоси функция $\gamma(\xi)$ принимает вещественные положительные значения, например $\gamma(i) = +\sqrt{k^2 + 1}$, причем $\arg(k - \xi) = -\arg(\xi + k) \in (-\pi/2, 0)$. Следовательно, если ξ лежит в верхней полуплоскости, то $\arg(k - \xi) \in (-\pi, 0)$ и $\arg(\xi + k) \in (0, \pi)$. Тогда $\arg \gamma(\xi) \in (-\pi/2, +\pi/2)$, то есть значения функции лежат в правой полуплоскости. Точнее, функция $\gamma(\xi)$ отображает 1-й квадрант комплексной плоскости в 4-й квадрант, а 2-й квадрант — в 1-й. Соответствие участков границ квадрантов показано на рисунке.



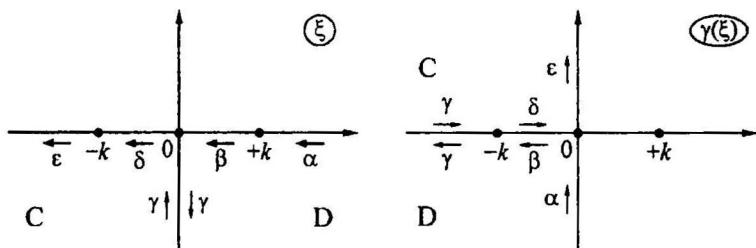
Обозначим $\gamma^+(\xi)$ предельное значение функции $\gamma(\xi)$ из верхней полуплоскости на вещественной оси. Так как $\arg \gamma^+(\xi) = +\pi/2$ при $\xi \in (-\infty, -k)$ и $\arg \gamma^+(\xi) = -\pi/2$ при $\xi \in (+k, +\infty)$, то

$$\gamma^+(\xi) = \begin{cases} \xi \in (-\infty, -k) & : +i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \\ \xi \in (-k, +k) & : +\sqrt{k^2 - \xi^2}; \\ \xi \in (+k, +\infty) & : -i\sqrt{\xi^2 - k^2}. \end{cases}$$

Аналогично, предельное значение из нижней полуплоскости на вещественной оси этой же ветви функции $\gamma(\xi)$

$$\gamma^-(\xi) = \begin{cases} \xi \in (-\infty, -k) & : +i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \\ \xi \in (-k, +k) & : -\sqrt{k^2 - \xi^2}; \\ \xi \in (+k, +\infty) & : -i\sqrt{\xi^2 - k^2}, \end{cases}$$

при этом функция $\gamma(\xi)$ отображает 3-й квадрант комплексной плоскости во 2-й квадрант, а 4-й квадрант - в 3-й.



Пусть теперь k - комплексное число, $\operatorname{Re} k > 0, \operatorname{Im} k \geq 0$. Пусть $k = k_0 e^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 > 0$. Условимся считать, что

$$\sqrt{k^2 - \xi^2} = e^{+i\varphi_0} \sqrt{k_0^2 - (e^{-i\varphi_0} \xi)^2} = e^{+i\varphi_0} \gamma(e^{-i\varphi_0} \xi),$$

где $\gamma(\cdot)$ - определенная выше при вещественном $k = k_0$ функция. Для значений новой функции будем использовать те же обозначения $\gamma(\xi)$. Таким образом, при комплексном k однозначная ветвь функции $\gamma(\xi)$ выделена в плоскости с разрезом от $-k$ до $+k$ по отрезку прямой, проходящей через точки ветвления.

Пусть ξ - вещественное число. При $\xi < 0$ точки $e^{-i\varphi_0} \xi$ расположены во 2-м квадранте, значения $\gamma(e^{-i\varphi_0} \xi)$ - в 1-м, а значения $e^{+i\varphi_0} \gamma(e^{-i\varphi_0} \xi)$ - в верхней полуплоскости. Тогда $\gamma(\xi) \rightarrow \gamma^+(\xi)$

при $\varphi_0 \rightarrow 0$. При $\xi > 0$ точки $e^{-i\varphi_0\xi}$ расположены в 4-м квадранте, значения $\gamma(e^{-i\varphi_0\xi})$ – в 3-м, а значения $e^{+i\varphi_0} \gamma(e^{-i\varphi_0\xi})$ – в нижней полуплоскости. Поэтому $\gamma(\xi) \rightarrow \gamma^-(\xi)$ при $\varphi_0 \rightarrow 0$.

2. Интегральные и сумматорные представления решений уравнения Гельмгольца

Чтобы получить интегральные или сумматорные представления решений уравнения Гельмгольца в плоских канонических областях, рассмотрим вспомогательные задачи Коши. Как известно, задачи Коши для эллиптических уравнений с частными производными являются переопределенными. На границе области достаточно задавать или значения искомого решения, или значения его нормальной производной, но не обе эти функции одновременно. Поэтому прежде всего нужно найти условия на граничные функции, которые обеспечивают существование и единственность решения.

2.1. Задача Коши для полуплоскости.

Будем искать решения уравнения Гельмгольца в верхней полуплоскости R_+^2

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x, z) = 0,$$

k – вещественное или комплексное число, удовлетворяющие граничным условиям

$$(2.2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = u_1(x)$$

(переопределенная задача Коши для полуплоскости). Достаточно считать, как и во многих других задачах математической физики, что искомое решение $u(x, z) \in L_1^{loc}(R_+^2)$. Но для обоснования метода преобразования Фурье удобно искать решения задачи Коши в более широком классе – в пространстве распределений медленного роста на бесконечности. Чтобы у распределения $u(x, z)$ и его производной по z были корректно определены следы на прямой $z = 0$, нужно предполагать, чтобы оно принадлежало пространству Соболева $H_s(R_+^2)$, $s > 3/2$. Но если речь идет о решениях уравнения Гельмгольца, то достаточно рассматривать

решения задачи Коши в пространстве распределений $H_1^{loc}(R_+^2)$ (см. [3]).

Пусть $\gamma^+(\xi)$ – предельное значение на вещественной оси определенной в п.1.3 ветви многозначной функции $\gamma(\xi)$.

Теорема 2.1. *Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (2.1), (2.2) при вещественном k тогда и только тогда, когда*

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) &= 0, & \xi < -k, \\ u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) &= 0, & \xi > +k, \end{aligned}$$

причем его образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.4) \quad (k^2 - \xi^2 - \zeta^2) u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u_1(\xi) - i\zeta u_0(\xi)].$$

Доказательство. Пусть $u(x, z)$ – решение задачи. Доопределим его нулем до всей плоскости и перейдем в уравнении (2.1) к образу Фурье по обоим переменным с учетом граничных условий (2.2). Получим, что образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (2.4). Продолжим уравнение (2.4) по переменной ζ в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости ζ , а переменную ξ будем рассматривать как параметр. При $\xi < -k$ и $\xi > +k$ полином $k^2 - \xi^2 - \zeta^2$ имеет комплексные корни $\pm\gamma^+(\xi)$. Так как распределение $u(\xi, \zeta)$ аналитически продолжимо в верхнюю полуплоскость по ζ , то левая часть продолженного уравнения обращается в нуль при $\zeta = \pm\gamma^+(\xi)$, лежащих в верхней полуплоскости. Тогда и правая часть уравнения обращается в нуль в этих точках, то есть выполняются равенства (2.3).

С другой стороны, если условия (2.3) выполнены, то в уравнении (2.4) при $\xi < -k$ и $\xi > +k$ слева и справа имеются одинаковые множители, обращающиеся в нуль при $\zeta = \pm\gamma^+(\xi)$. Сократив их, можно найти решение $u(\xi, \zeta)$ уравнения (2.4), причем это распределение будет аналитически продолжимо по ζ в верхнюю полуплоскость. Тогда с помощью обратного преобразования Фурье легко получить решение исходной задачи Коши. \square

Исследуем решение уравнения (2.4). При $|\xi| > k$

$$(2.5a) \quad u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{v_1(\xi)}{\zeta - \gamma^+(\xi)} + \frac{v_2(\xi)}{\zeta + \gamma^+(\xi)} \right],$$

$$v_1(\xi) = \frac{-u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi) u_0(\xi)}{2\gamma^+(\xi)}, \quad v_2(\xi) = \frac{+u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi) u_0(\xi)}{2\gamma^+(\xi)}.$$

Условия (3) равносильны тому, что $v_1(\xi) = 0$ при $\xi < -k$ и $v_2(\xi) = 0$ при $\xi > +k$. При $-k < \xi < +k$ полином $k^2 - \xi^2 - \zeta^2$ имеет вещественные корни $\pm\gamma^+(\xi)$. Методом выхода в комплексную плоскость (точнее, в верхнюю полуплоскость) получим

$$(2.5b) \quad u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{v_1(\xi)}{\zeta + i0 - \gamma^+(\xi)} + \frac{v_2(\xi)}{\zeta + i0 + \gamma^+(\xi)} \right].$$

Тогда при $z > 0$

$$(2.6) \quad u(x, z) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-k} v_2(\xi) e^{+i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi -$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{+k}^{+\infty} v_1(\xi) e^{-i\gamma^+(\xi)z} e^{-i\xi x} d\xi +$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{+k} [v_1(\xi) e^{-i\gamma^+(\xi)z} + v_2(\xi) e^{+i\gamma^+(\xi)z}] e^{-i\xi x} d\xi.$$

В правой части формулы (2.6) первые два слагаемых представляют собой суммы гармоник, затухающих в направлении оси z . Третье слагаемое содержит распространяющиеся волны, причем плотность интеграла $v_1(\xi)$ определяет гармоники, приходящие с бесконечности, а $v_2(\xi)$ — уходящие на бесконечность.

Пусть выбрана зависимость поля от времени в виде $\exp(i\omega t)$. Будем различать два класса решений задачи Коши (2.1), (2.2): уходящие на бесконечность решения, для которых выполняется условие

$$(2.7) \quad u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad -k < \xi < +k$$

и приходящие с бесконечности решения, для которых

$$(2.8) \quad u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad -k < \xi < +k.$$

На языке теории распределений можно дать эквивалентные определения [5] (см. также раздел 4).

Пусть теперь k – комплексное число, $\operatorname{Re} k > 0$, $\operatorname{Im} k \geq 0$, причем $k = k_0 e^{i\varphi_0}$. Тогда образ Фурье искомого решения задачи Коши также удовлетворяет уравнению (2.4), при этом $u(\xi, \zeta)$ будет аналитически продолжимо по ζ в верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi < 0,$$

$$u_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi > 0.$$

При $\varphi_0 \rightarrow 0$ получим

$$u_1(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi < 0,$$

$$u_1(\xi) + i\gamma^-(\xi)u_0(\xi) = 0, \quad \xi > 0.$$

Так как $\gamma^-(\xi) = -\gamma^+(\xi)$ при $-k < \xi < +k$, то в результате предельного перехода от комплексного волнового числа к вещественному получим решение задачи Коши в классе уходящих на бесконечность решений. Таким образом, справедлив принцип предельного поглощения для рассматриваемой задачи.

Если обозначить

$$\gamma_0(\xi) = \left\{ |\xi| > k : +i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \quad |\xi| < k : -\sqrt{k^2 - \xi^2} \right\}$$

(эта функция не является предельным значением какой-либо функции, аналитической в верхней полуплоскости), то условия (2.3), (2.4) и (2.7) можно записать в виде одного условия

$$(2.9) \quad u_1(\xi) - i\gamma_0(\xi) u_0(\xi) = 0, \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

Для уходящих на бесконечность решений условие (2.9) устанавливает связь между заданными на прямой $z = 0$ распределениями $u_0(x)$ и $u_1(x)$ на языке их образов Фурье. Применив обратное преобразование Фурье, получим

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma_0(\xi) u_0(\xi) e^{-i\xi x} d\xi,$$

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{\gamma_0(\xi)} u_1(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Легко видеть, что правые части этих равенств определяют взаимно обратные *псевдодифференциальные операторы* (ПДО) с символами $-i/\gamma_0(\xi)$ и $i\gamma_0(\xi)$ соответственно [19], гл. II, §2. Операторы такого вида (операторы Пуанкаре-Стеклова и обратные к ним) используются в методе разделения областей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами [20].

Следствие 2.1. *Решение $u(x, z)$ уравнения (2.1) принадлежит классу уходящих от прямой $z = 0$ в полуплоскость $z > 0$ решений и удовлетворяет граничным условиям (2.2) тогда и только тогда, когда*

$$(2.10) \quad u_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) K_0(\tau, x) d\tau,$$

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) K_1(\tau, x) d\tau,$$

где

$$K_0(\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma_0(\xi) e^{i\xi(\tau-x)} d\xi = \\ = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) \frac{k}{|\tau-x|} H_1^{(2)}(k|\tau-x|),$$

$$K_1(\tau, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\gamma(\xi)} e^{i\xi(\tau-x)} d\xi = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) H_0^{(2)}(k|\tau-x|).$$

Интегралы в ядрах вычислены по формулам 130 и 134 из [21].

Выполнив обратное преобразование Фурье по двум переменным, из формул (2.5) получим интегральное представление решения задачи Коши (2.1), (2.2) в классе уходящих на бесконечность решений.

Для нижней полуплоскости все рассуждения проводятся точно так же. Соответствующие этому случаю формулы можно получить из приведенных выше, если изменить знак у функции $\gamma^+(\xi)$.

Если распределение $u(x, z)$ в полуплоскости $z > 0$ является l -периодическим по переменной x , то его след $u_0(x)$ и след $u_1(x)$ его производной по z на прямой $z = 0$ будут периодическими распределениями с тем же периодом. Обратное утверждение также имеет место.

Обозначим для удобства $\Lambda = 2\pi/l$.

Теорема 2.2. Пусть $u(x, z)$ – решение уравнения (2.1) из класса уходящих от прямой $z = 0$ в полуплоскость $z > 0$ решений. Если одно из трех распределений $u(x, z)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ является l -периодическим по x , то и другие имеют такой же период. Решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует тогда и только тогда, когда коэффициенты Фурье распределений $u_0(x)$ и $u_1(x)$ связаны равенствами

$$(2.11) \quad u_{1n} - i\gamma_n u_{0n} = 0, \quad \gamma_n = \gamma_0(\Lambda n), \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

При этом при $z > 0$

$$(2.12) \quad u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{0n} e^{i\gamma_n z} e^{i\Lambda n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{1n} \frac{-i}{\gamma_n} e^{i\gamma_n z} e^{i\Lambda n x}.$$

Это утверждение следует непосредственно из равенств (2.10). Например,

$$\text{если } u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{0n} e^{i\Lambda n x}, \text{ то } u_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_{0n} i\gamma(-\Lambda n) e^{i\Lambda n x}.$$

Представление (2.12) можно получить и из формулы Грина.

Следствие 2.2. Пусть

$$K_0(\tau, y) = \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{i\Lambda m(y-\tau)}, \quad K_1(\tau, y) = \frac{1}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{i\Lambda m(y-\tau)}.$$

Тогда

$$(2.13) \quad \int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda_n \tau} \right) K_1(\tau, y) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda_n y}, \quad y \in (0, l),$$

$$(2.14) \quad \int_0^l \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda_n \tau} \right) K_0(\tau, y) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda_n y}, \quad y \in (0, l).$$

Действительно, если считать, что $a_n = u_{0n}$ и $ia_n \gamma_n = u_{1n}$ (множитель i внесен в ядра), то равенства (2.13) и (2.14) - просто формулы (2.10), записанные для периодических распределений.

2.2. Задача Коши для четверти плоскости.

Покажем, как работает метод преобразования Фурье в более сложном случае. Будем искать решения уравнения Гельмгольца (2.1) в четверти плоскости $x > 0$, $z > 0$, k - вещественное число, удовлетворяющие граничным условиям

$$(2.15) \quad u(0, z) = a_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, z) = a_1(z),$$

$$u(x, 0) = b_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = b_1(x)$$

(переопределенная задача Коши для квадрата).

Условимся обозначать римскими цифрами квадранты комплексных плоскостей переменных ξ и ζ . Пусть биполуплоскость $D^{++} = \{\operatorname{Re} \xi > 0\} \times \{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$.

Теорема 2.3. Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (2.1), (2.15) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(2.16) \quad a_1(\zeta) - i\zeta a_0(\zeta) + b_1(\xi) - i\zeta b_0(\xi) = 0$$

$$\forall (\xi, \zeta) \in D^{++} \quad | \quad k^2 - \xi^2 - \zeta^2 = 0,$$

при этом распределение $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.17) \quad (k^2 - \xi^2 - \zeta^2)u(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [a_1(\zeta) - i\zeta a_0(\zeta) + b_1(\xi) - i\zeta b_0(\xi)].$$

Доказательство. Пусть $u(x, z)$ – решение задачи. Доопределим его нулем до всей плоскости и будем рассматривать как распределение. Перейдем к образам Фурье по обоим переменным. Получим, что образ Фурье $u(\xi, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (2.17). Так как распределение $u(\xi, \zeta)$ аналитически продолжимо по каждому своему аргументу с вещественной оси в верхнюю комплексную полуплоскость, то есть с остова границ биолуплоскостей в D^{++} , то и уравнение (2.17) можно аналитически продолжить в эту область. Тогда, если $k^2 - \xi^2 - \zeta^2 = 0$ при некоторых $(\xi, \zeta) \in D^{++}$, то и правая часть продолженного в комплексную область уравнения (2.17) обращается в нуль.

С другой стороны, пусть равенство (2.16) выполнено. Тогда из уравнения (2.17) методом выхода в комплексную плоскость можно найти распределение $u(\xi, \zeta)$. \square

Следствие 2.3. *Распределение $u(x, z)$ является решением задачи (2.1). (2.16) тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$(2.18) \quad a_1(-\gamma(\dot{\xi})) - i\dot{\xi}a_0(-\gamma(\dot{\xi})) + b_1(\dot{\xi}) + i\gamma(\dot{\xi})b_0(\dot{\xi}) = 0, \quad \dot{\xi} \in I,$$

$$(2.19) \quad a_1(\gamma(\dot{\xi})) - i\dot{\xi}a_0(\gamma(\dot{\xi})) + b_1(\dot{\xi}) - i\gamma(\dot{\xi})b_0(\dot{\xi}) = 0, \quad \dot{\xi} \in II.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\dot{\xi} \in I$. Тогда $\gamma(\dot{\xi}) \in IV$ и $\dot{\zeta} = -\gamma(\dot{\xi}) \in II$. Если $\dot{\xi} \in II$, то $\dot{\zeta} = \gamma(\dot{\xi}) \in I$. Поэтому условие (2.16) равносильно условиям (2.18) и (2.19).

Если же $\dot{\xi}$ принадлежит положительной мнимой полуоси, то есть $\dot{\xi} = i\eta$, $\eta \in (0, +\infty)$, то $\gamma(\dot{\xi})$ принадлежит вещественной оси, но не принадлежит квадрантам I и II . \square

Аналогичным образом можно получить равенства

$$(2.20) \quad a_1(\dot{\zeta}) + i\gamma(\dot{\zeta})a_0(\dot{\zeta}) + b_1(-\gamma(\dot{\zeta})) - i\dot{\zeta}b_0(-\gamma(\dot{\zeta})) = 0, \quad \dot{\zeta} \in I,$$

$$(2.21) \quad a_1(\dot{\zeta}) - i\gamma(\dot{\zeta})a_0(\dot{\zeta}) + b_1(\gamma(\dot{\zeta})) - i\dot{\zeta}b_0(\gamma(\dot{\zeta})) = 0, \quad \dot{\zeta} \in II,$$

эквивалентные (2.18) и (2.19). Легко видеть, что если в (2.18) обозначить $\dot{\zeta} = -\gamma(\dot{\xi})$, при этом $\dot{\xi} = \gamma(\dot{\zeta})$, то получим (2.21). Если в (2.19) обозначить $\dot{\zeta} = \gamma(\dot{\xi})$, то получим (2.20).

Дальнейшие действия сводятся к следующему. Левые части равенств (2.18)–(2.21) нужно продолжить на границы квадрантов. Тогда получим соотношения между образами Фурье граничных функций, которые обеспечивают существование решения задачи Коши. Далее, представим решение уравнения (2.17) в виде суммы простых дробей и применим обратное преобразование Фурье. Выделим слагаемые, содержащие приходящие с бесконечности гармоники и уходящие на бесконечность гармоники. Тогда можно будет сформулировать условия на бесконечности (условия излучения). Например, в решении задачи Коши отсутствуют уходящие на бесконечность волны тогда и только тогда, когда

$$a_1(-\gamma^+(\xi)) - i\xi a_0(-\gamma^+(\xi)) + b_1(\xi) + i\gamma^+(\xi)b_0(\xi) = 0, \quad \xi \in (-k, 0).$$

Полная система равенств такого вида позволяет выразить распределения $a_1(\cdot)$, $b_1(\cdot)$ через $a_0(\cdot)$, $b_0(\cdot)$ и наоборот.

В [8], [10] получены решения задачи Коши для полуполосы $x > 0$, $0 < z < h$ в случае, когда на отрезке $0 < z < h$ заданы значения искомого решения и его нормальной производной, а на лучах $z = 0$, $z = h$ – однородные условия Дирихле или Неймана. Задача Коши для бесконечной полосы с произвольными граничными условиями решена в [13].

3. Интегральные и сумматорные уравнения скалярных задач сопряжения полей

Исследуем методом частичных областей три задачи сопряжения на прямой скалярных электромагнитных полей в полуплоскостях. Используем представления решений уравнения Гельмгольца, полученные в предыдущей главе. Будем считать, что компоненты поля не зависят от координаты y . Рассмотрим только случай ТЕ-поляризации.

Каждая из рассматриваемых задач может быть сформулирована как граничная задача для уравнения Гельмгольца

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z) u(x, z) = 0$$

с кусочно-постоянным коэффициентом $k(z) = \{z > 0 : k^+; z <$

$0 : k^-$ } при различных условиях сопряжения на прямой $z = 0$. Ограничимся случаем, когда k^\pm – вещественные числа.

3.1. Рассеяние ЭМВ на плоской границе раздела сред.

Пусть на плоскость $z = 0$ падает электромагнитная ТЕ-волна, приходящая из бесконечности. Нужно найти отраженную и преломленную волны. Такая задача сводится к задаче о скачке для уравнения Гельмгольца: найти решение уравнения (3.1) при $z > 0$ и $z < 0$ в классе уходящих на бесконечность решений, удовлетворяющее при $-\infty < x < +\infty$ условиям

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0+0) - u(x, 0-0) &= a(x), \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0-0) &= b(x). \end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Решение задачи о скачке (3.1), (3.2) имеет вид*

$$(3.3) \quad u^\pm(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm a(\xi)\gamma^\mp(\xi) - ib(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{\pm i\gamma^\pm(\xi)z - i\xi x} d\xi$$

при $z > 0$ и $z < 0$, где

$$\gamma^\pm(\xi) = \{ |\xi| \geq k^\pm : +i\sqrt{\xi^2 - (k^\pm)^2}; \quad |\xi| \leq k^\pm : -\sqrt{(k^\pm)^2 - \xi^2} \}.$$

Действительно, из теоремы 2.1 следует, что

$$(k^{+2} - \xi^2 - \zeta^2)u^+(\xi, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u_1^+(\xi) - i\zeta u_0^+(\xi)],$$

$$(k^{-2} - \xi^2 - \zeta^2)u^-(\xi, \zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [u_1^-(\xi) - i\zeta u_0^-(\xi)],$$

причем распределения $u_j^\pm(\xi)$ удовлетворяют равенствам

$$u_1^+(\xi) - i\gamma^+(\xi)u_0^+(\xi) = 0, \quad u_1^-(\xi) + i\gamma^-(\xi)u_0^-(\xi) = 0.$$

Условия задачи о скачке в образах Фурье имеют вид

$$u_0^+(\xi) - u_0^-(\xi) = a(\xi), \quad u_1^+(\xi) - u_1^-(\xi) = b(\xi).$$

Тогда, решив систему из четырех линейных уравнений, найдем

$$u^+(\xi, \zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\zeta + \gamma_+(\xi)} \frac{a(\xi)\gamma^-(\xi) - ib(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)},$$

$$u^-(\xi, \zeta) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{\zeta - \gamma_-(\xi)} \frac{-a(\xi)\gamma^+(\xi) - ib(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)}$$

и, применив обратное преобразование Фурье, получим (3.3). \square

Формулы (3.3) можно использовать при доказательстве очевидного с физической точки зрения факта, что при падении плоской волны на плоскую границу раздела сред отраженная и преломленная волны также будут плоскими волнами.

Следствие 3.1. При $\varepsilon^\pm = \varepsilon$ решение задачи о скачке (3.1), (3.2) имеет вид

$$(3.4) \quad u^\pm(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pm a(\xi)\gamma(\xi) - ib(\xi)}{2\gamma(\xi)} e^{\pm i\gamma(\xi)z - i\xi x} d\xi.$$

Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскослойной среде аналогичным методом исследована в работах [12], [13]. В [8], [10] получено явное решение задачи о скачке на отрезке $x = 0$ для уравнения Гельмгольца в полосе $0 < z < h$ при однородных граничных условиях Дирихле или Неймана на прямых $z = 0, z = h$.

3.2. Задача дифракции на металлической полосе.

Пусть в плоскости $z = 0$, разделяющей две среды $z > 0$ и $z < 0$ с диэлектрическими проницаемостями ε^+ и ε^- , расположена идеально проводящая бесконечно тонкая металлическая полоса $\alpha < x < \beta$. Нужно найти поле, возникающее при дифракции электромагнитной волны, падающей из области $z > 0$ на плоскость $z = 0$.

Будем искать решения уравнения Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе решений, уходящих от прямой $z = 0$ на бесконечность, в форме решений задачи Коши для верхней и нижней полуплоскостей с граничными распределениями $u_0^\pm(x)$ и $u_1^\pm(x)$.

Обозначим $\mathcal{M} = (\alpha, \beta)$ и $\mathcal{N} = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$. На границе раздела сред $z = 0$ должны быть выполнены условия

$$(3.5) \quad u_0^+(x) + u_0^0(x) = 0, \quad u_0^-(x) = 0, \quad x \in \mathcal{M},$$

$$(3.6) \quad u_0^+(x) + u_0^0(x) = u_0^-(x), \quad u_1^+(x) + u_1^0(x) = u_1^-(x), \quad x \in \mathcal{N}.$$

Пусть $\varepsilon^\pm = \varepsilon$. Тогда $\gamma^\pm(\xi) = \gamma(\xi)$ и формулы (2.10) задают зависимости между следами на прямой $z = 0$ искоемых и заданных распределений:

(3.7)

$$u_1^\pm(x) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^\pm(t) K_0(t, x) dt, \quad u_0^\pm(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^\pm(\tau) K_1(\tau, t) d\tau,$$

$$u_1^0(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^0(t) K_0(t, x) dt, \quad u_0^0(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau.$$

Лемма 3.1. *Задача дифракции электромагнитной волны на металлической полосе эквивалентна парному уравнению*

$$(3.8) \quad u_0^+(x) = -u_0^0(x), \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^+(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Действительно, из условия (3.5) непосредственно следует первая часть парного уравнения. При $x \in \mathcal{N}$

$$u_1^+(x) = u_1^-(x) - u_1^0(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^-(t) K_0(t, x) dt - u_1^0(x) =$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^+(t) K_0(t, x) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^0(t) K_0(t, x) dt - u_1^0(x) =$$

$$= -u_1^+(x) + u_1^0(x) - u_1^0(x) = -u_1^+(x)$$

и тогда $u_1^+(x) = 0$. \square

Точно так же можно показать, что задача дифракции на полосе эквивалентна парному уравнению

$$(3.9) \quad u_0^-(x) = 0, \quad x \in \mathcal{M}; \quad u_1^-(x) = u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{N}.$$

Из (3.7)-(3.9) следует, что следы на $z = 0$ искомых распределений в задаче дифракции на полосе удовлетворяют уравнениям

$$(3.10) \quad u_0^+(t) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau,$$

$$u_1^+(x) = - \int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x) dt + \int_{\mathcal{N}} u_0^+(t) K_0(t, x) dt,$$

$$(3.11) \quad u_0^-(t) = - \int_{\mathcal{M}} u_1^-(\tau) K_1(\tau, t) d\tau - \int_{\mathcal{N}} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau,$$

$$u_1^-(x) = - \int_{\mathcal{N}} u_0^-(t) K_0(t, x) dt.$$

Теорема 3.2. *Задача дифракции на полосе эквивалентна интегральным уравнениям*

$$(3.12) \quad \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) K_1(\tau, t) d\tau = -u_0^0(t), \quad t \in \mathcal{M},$$

$$(3.13) \quad \int_{\mathcal{N}} u_0^-(t) K_0(t, x) dt = -u_1^0(x), \quad x \in \mathcal{N},$$

$$(3.14) \quad u_1^+(x) = \int_{\mathcal{M}} u_1^+(\tau) \left[\int_{\mathcal{N}} K_1(\tau, t) K_0(t, x) dt \right] d\tau -$$

$$- \int_{\mathcal{M}} u_0^0(t) K_0(t, x) dt, \quad x \in \mathcal{M},$$

$$(3.15) \quad u_0^-(t) = \int_{\mathcal{N}} u_0^-(\xi) \left[\int_{\mathcal{M}} K_0(\xi, \tau) K_1(\tau, t) d\tau \right] d\xi -$$

$$- \int_{\mathcal{N}} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Доказательство. Интегральные уравнения (3.12) и (3.13) легко получить из уравнений (3.8) и (3.9) с помощью представлений (3.10) и (3.11), выразив в (3.8) $u_0^+(x)$ через $u_1^+(x)$ и в (3.9) $u_1^-(x)$ через $u_0^-(x)$.

Уравнения (3.14) и (3.15) можно получить, рассматривая (3.10) и (3.11) как системы уравнений и исключая в них одно из неизвестных граничных распределений. \square

Таким образом, с помощью полученных в главе 2 интегральных тождеств для граничных распределений падающей волны граничные условия задачи дифракции могут быть записаны как парное функциональное уравнение (3.8) или (3.9). Эти же тождества, записанные для граничных распределений искомых полей, позволяют преобразовать парные уравнения с одной стороны в интегральные уравнения (3.12) и (3.13) формально 1-го рода, а с другой стороны, в интегральные уравнения (3.14) и (3.15) формально 2-го рода. Отметим, что уравнение (3.12) имеет логарифмическую особенность в ядре, а уравнение (3.13) – гиперсингулярное.

В [10] показано, что в задаче дифракции на полосе можно получить еще две пары аналогичных интегральных уравнений.

Пусть теперь $\epsilon^+ \neq \epsilon^-$. Покажем, как при сведении задачи дифракции на полосе к интегральному уравнению можно использовать явное решение (3.3) задачи о скачке на прямой.

Теорема 3.3. *Задача дифракции на полосе эквивалентна интегральному уравнению*

$$(3.16) \quad \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} \frac{b(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi = u_0^0(x) - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0^0(\xi) \gamma^-(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi + \\ + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{N}} \frac{u_1^0(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Доказательство. Будем искать решение задачи дифракции в форме решения задачи о скачке. Из (3.5), (3.6) следует, что

$a(x) = u_0^+(x) - u_0^-(x) = -u_0^0(x)$ на всей прямой и $b(x) = u_1^+(x) - u_1^-(x) = -u_1^0(x)$ на \mathcal{N} . Тогда по формуле (3.3)

$$\begin{aligned} u_0^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\xi)\gamma^-(\xi) - ib(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0^0(\xi)\gamma^-(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi - \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{M}} \frac{b(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi + \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_1^0(\xi)}{\gamma^+(\xi) + \gamma^-(\xi)} e^{-i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Но $u_0^+(x) = -u_0^0(x)$, $x \in \mathcal{M}$. \square

Следствие 3.2. При $\varepsilon^\pm = \varepsilon$ задача дифракции на полосе эквивалентна интегральному уравнению

$$(3.17) \quad \int_{\mathcal{M}} b(\tau) K_1(\tau, t) d\tau = -u_0^0(t) + \int_{\mathcal{N}} u_1^0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau, \quad t \in \mathcal{M}.$$

Доказательство. Запишем уравнение (3.16) при $\varepsilon^\pm = \varepsilon$ и выразим $b(\xi)$ через $b(x)$ с помощью обратного преобразования Фурье. С другой стороны, уравнение (3.17) можно получить, если из уравнения (3.12) вычесть равносильное ему уравнение относительно $u_1^-(x)$. \square

В работах [8], [10] показано, как с помощью аналогичных рассуждений могут быть выведены интегральные уравнения в задаче о дифракции электромагнитной волны на перегородке в плоском волноводе с металлическими стенками.

3.3. Задача дифракции на периодической решетке.

Пусть в плоскости xu расположена l -периодическая решетка, состоящая из бесконечно тонких и идеально проводящих металлических лент, параллельных оси x . Обозначим через \mathcal{M} множество точек интервала $(0, l)$, расположенных внутри сечения лент, а через \mathcal{N} — все внутренние точки оставшейся части интервала.

Пусть из области $z > 0$ нормально к решетке падает плоская электромагнитная волна с потенциальной функцией $u^0(y, z) = e^{-ikz}$. Нужно найти дифрагированное поле.

Будем искать потенциальные функции поля над решеткой и под решеткой в виде (в соответствии с теоремой 2.2)

$$u^+(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{i\Lambda n y}, \quad z > 0, \quad (3.18)$$

$$u^-(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{i\Lambda n y}, \quad z < 0,$$

где обозначено $\Lambda = 2\pi/l$ и

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sqrt{k^2 - (\Lambda n)^2} = \\ &= \left\{ n \leq l/\lambda : \sqrt{k^2 - (\Lambda n)^2}; \quad n \geq l/\lambda : i\sqrt{(\Lambda n)^2 - k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Ветвь корня выбрана так, чтобы отдельные гармоники были затухающими или уходящими на бесконечность волнами (при зависимости вида $e^{-i\omega t}$ компонент поля от времени). При этом $\gamma_0 = k$ и $\gamma_n \sim i|n|$ при $|n| \rightarrow \infty$.

Лемма 3.2. *Задача дифракции плоской волны на периодической решетке эквивалентна парному сумматорному уравнению*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = -1, \quad y \in \mathcal{M}, \quad (3.19)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n y} = 0, \quad y \in \mathcal{N}. \quad (3.20)$$

Утверждение леммы непосредственно следует из условий сопряжения полей

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i\Lambda n y} = 0, \quad x \in \mathcal{M},$$

$$1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i\Lambda n y}, \quad x \in \mathcal{N},$$

$$-k + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n y} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \gamma_n e^{i\Lambda n y}, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Легко видеть, что $b_0 = a_0 + 1$ и $b_n = a_n \quad \forall n \neq 0$. \square

Теорема 3.4. *Задача дифракции плоской волны на периодической решетке эквивалентна БСЛАУ*

$$(3.21) \quad l\gamma_m a_m + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (1 - \gamma_n) I_{n-m} = -I_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \dots,$$

(3.22)

$$l a_k - \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} J_{m-k} = -I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

где

$$I_k = \int_{\mathcal{M}} e^{i\Lambda k \tau} d\tau, \quad J_k = \int_{\mathcal{N}} e^{i\Lambda k y} dy, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Доказательство. Систему уравнений (3.21) легко получить, если приравнять коэффициенты Фурье левых и правых частей парного уравнения (3.19), (3.20).

Из (3.20) и тождества (2.14) следует, что при $y \in \mathcal{N}$

$$(3.23) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n e^{i\Lambda n \tau} \right) K_1(\tau, y) d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \int_{\mathcal{M}} e^{i\Lambda n \tau} K_1(\tau, y) d\tau =$$

$$= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} e^{i\Lambda m y}.$$

Приравняв коэффициенты Фурье левой и правой частей парного равенства (3.19), (3.23), получим

$$l a_k = -l_{-k} + \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \gamma_n \int_{\mathcal{M}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} I_{n-m} e^{i\Lambda(m-k)y} \right) dy$$

или (3.22). \square

На языке следов на $z = 0$ распределений $u^\pm(y, z)$ и их производных по z сумматорное уравнение (3.19), (3.20) и аналогичное уравнение с неизвестными b_n можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_0^+(y) &= -1, \quad y \in \mathcal{M}; & u_1^+(y) &= 0, \quad y \in \mathcal{N}, \\ u_0^-(y) &= 0, \quad y \in \mathcal{M}; & u_1^-(y) &= k, \quad y \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Отсюда, рассуждая как в п.3.2, можно получить интегральные тождества для граничных распределений и, следовательно, интегральные уравнения относительно $u_0^\pm(y)$, $u_1^\pm(y)$.

Задача дифракции ЭМВ на периодической решетке и различные ее обобщения подробно исследованы в монографиях [16], [17], [18]. Метод задачи Римана-Гильберта (или метод полуобращения) основан на том, что можно получить явное решение парного уравнения

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\Lambda n y} = -1, \quad y \in \mathcal{M}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n |n| e^{i\Lambda n y} = 0, \quad y \in \mathcal{N},$$

а потом с его помощью привести к регулярному уравнению (3.19), (3.20). Изложенный выше метод интегральных тождеств также можно рассматривать как один из вариантов общего метода полуобращения, позволяющий преобразовать интегральное уравнение 1-го рода в уравнение 2-го рода.

4. Граничные задачи для системы уравнений Максвелла

При исследовании векторных граничных задач электродинамики также удобно использовать представления решений системы уравнений Максвелла, полученные при решении вспомогательных задач Коши методом преобразования Фурье.

4.1. Задача Коши для полупространства.

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений Максвелла в верхнем полупространстве $R_+^3 = \{z > 0\}$

$$(4.1) \quad \operatorname{rot} H = i\omega\epsilon_0\epsilon E, \quad \operatorname{rot} E = -i\omega\mu_0\mu H, \quad (x, y, z) \in R_+^3$$

с вещественными ϵ, μ , считаем, что зависимость поля от времени имеет вид $\exp(i\omega t)$.

Как и в скалярном случае, достаточно рассматривать решения системы (4.1) в пространстве $L_1^{loc}(R_+^3)$. Но удобнее использовать существенно более широкое пространство распределений медленного роста на бесконечности $H_1^{loc}(R_+^3)$.

Решение (E, H) системы (4.1) назовем *уходящим от плоскости $z = 0$ в полупространство $z > 0$* , если каждая из его компонент $F(x, y, z) = E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ 1) является распределением медленного роста, $\operatorname{supp} F(x, y, z) \subset \{z > 0\}$ и

$$(4.2) \quad \operatorname{sing\,supp} F(\xi, \eta, \zeta) \cap \{\zeta < 0\} = \emptyset.$$

Будем искать в R_+^3 решение системы уравнений Максвелла по заданным на плоскости $z = 0$ значениям касательных составляющих векторов E и H , то есть решение, удовлетворяющее условиям

$$(4.3) \quad [z_0, E](x, y, 0) = e(x, y), \quad [z_0, H](x, y, 0) = h(x, y),$$

где z_0 – единичный вектор оси z . Эта задача является переопределенной, достаточно задавать на плоскости $z = 0$ только одно из двух граничных условий (4.3). Но наша цель – найти связь между граничными функциями в переопределенной задаче.

Пусть k – волновое число, $k^2 = \omega^2\mu_0\mu\epsilon_0\epsilon$. Обозначим

$$\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2} = \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 \geq k^2 : +i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - k^2}; \\ \xi^2 + \eta^2 \leq k^2 : -\sqrt{k^2 - \xi^2 - \eta^2}. \end{cases}$$

Теорема 4.1. *Решение (E, H) системы (4.1) принадлежит классу уходящих от плоскости $z = 0$ в полупространство $z > 0$ решений и удовлетворяет граничным условиям (4.3) тогда*

и только тогда, когда для образов Фурье следов его компонент на плоскости $z = 0$ выполняется равенство

$$(4.4a) \quad \omega \varepsilon_0 \varepsilon \gamma(\xi, \eta) e(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) h(\xi, \eta) = 0$$

или

$$(4.4b) \quad P(\xi, \eta) e(\xi, \eta) - \omega \mu_0 \mu \gamma(\xi, \eta) h(\xi, \eta) = 0,$$

где

$$P(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi \eta & k^2 - \xi^2 \\ \eta^2 - k^2 & -\xi \eta \end{pmatrix}.$$

При этом

$$(4.5a) \quad E(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \left[A e(\xi, \eta) + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} B(\xi, \eta) h(\xi, \eta) \right],$$

$$(4.5b) \quad H(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \left[-\frac{1}{\omega \mu_0 \mu} B(\xi, \eta) e(\xi, \eta) + A h(\xi, \eta) \right],$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \eta & -\xi \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть (E, H) – решение задачи. Доопределим его нулем до всего пространства и перейдем в уравнениях (4.1) к образам Фурье по всем переменным с учетом граничных условий (4.3). Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -i\eta H_z + h_y + i\zeta H_y &= i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_x, & -i\eta E_z + e_y + i\zeta E_y &= -\omega \mu_0 \mu H_x \\ -h_x - i\zeta H_x + i\xi H_z &= i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y, & -e_x - i\zeta E_x + i\xi E_z &= -\omega \mu_0 \mu H_y \\ -i\xi H_y + i\eta H_x &= i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z, & -i\xi E_y + i\eta E_x &= -\omega \mu_0 \mu H_z. \end{aligned}$$

Исключая компоненты E_z, H_z , перейдем к векторным уравнениям

$$P(\xi, \eta)[z_0, E] + \omega \mu_0 \mu \zeta [z_0, H] = i\omega \mu_0 \mu h,$$

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon \zeta [z_0, E] - P(\xi, \eta)[z_0, H] = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon e.$$

Исключая неизвестные векторы, получим уравнения

$$[\zeta^2 - \gamma^2(\xi, \eta)][z_0, E] = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} P(\xi, \eta) h(\xi, \eta) + i\zeta e(\xi, \eta),$$

$$[\zeta^2 - \gamma^2(\xi, \eta)] [z_0, H] = -\frac{i}{\omega\mu_0\mu} P(\xi, \eta) e(\xi, \eta) + i\zeta h(\xi, \eta).$$

Их решения будут предельными значениями аналитических в верхней полуплоскости по переменной ζ функций тогда и только тогда, когда при $\xi^2 + \eta^2 > k^2$ выполняются равенства (4.4) (продолженные в верхнюю полуплоскость образы Фурье компонент поля не могут иметь там полюсов). Условие (4.2) равносильно тому, что функция $F(\xi, \eta, \zeta)$ по переменной ζ непрерывно продолжима на все точки отрицательной полуоси. Тогда равенства (4.4) должны выполняться и при $\xi^2 + \eta^2 < k^2$. \square

Отметим, что $P^2(\xi, \eta) = -k^2\gamma^2(\xi, \eta) I$, I - единичная матрица (можно ввести такую нормировку, чтобы $P^2(\xi, \eta) = I$). Равенства (4.4a) и (4.4b) следуют друг из друга, это легко проверить, умножив их слева на матрицу $P(\xi, \eta)$.

Следствие 4.1. Если выполнены условия (4.4), то решение задачи Коши существует, единственно и

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \left[A + \frac{1}{k^2\gamma(\xi, \eta)} B(\xi, \eta) P(\xi, \eta) \right] e(\xi, \eta) = \\ &= \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \frac{1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \left[-\frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} AP(\xi, \eta) + B(\xi, \eta) \right] e(\xi, \eta), \\ H(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \left[\frac{1}{k^2\gamma(\xi, \eta)} B(\xi, \eta) P(\xi, \eta) + A \right] h(\xi, \eta) = \\ &= \frac{i}{\zeta + \gamma(\xi, \eta)} \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \left[-B(\xi, \eta) + \frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} AP(\xi, \eta) \right] e(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (4.4) задают зависимость между заданными на границе области значениями касательных компонент поля на языке их образов Фурье.

Следствие 4.2. Если образы Фурье распределений $e(x, y)$, $h(x, y)$ удовлетворяют равенствам (4.4), то

$$(4.6a) \quad e(x, y) = -\frac{1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \iint K(x_1, y_1; x, y) h(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

$$(4.6b) \quad h(x, y) = \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \iint K(x_1, y_1; x, y) e(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

где

$$K(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} P(\xi, \eta) e^{i(x_1 - x)\xi + i(y_1 - y)\eta} d\xi d\eta.$$

Для уходящих от плоскости $z = 0$ в полупространство $z < 0$ решений условие (4.2) заменяется на

$$(4.7) \quad \text{sing supp } F(\xi, \eta, \zeta) \cap \{\zeta > 0\} = \emptyset.$$

Для уходящих в нижнее полупространство решений справедливы аналогичные утверждения, достаточно во всех приведенных выше формулах изменить знак у функции $\gamma(\xi, \eta)$. При этом, в частности, условия (4.4) заменяются на

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \omega \varepsilon_0 \varepsilon \gamma(\xi, \eta) \varepsilon(\xi, \eta) - P(\xi, \eta) h(\xi, \eta) &= 0 \\ P(\xi, \eta) \varepsilon(\xi, \eta) + \omega \mu_0 \mu \gamma(\xi, \eta) h(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned}$$

Для приходящих к плоскости $z = 0$ решений системы (4.1) в R_+^3 также нужно использовать условие (4.7) вместо (4.2), а в определении приходящих к плоскости $z = 0$ решений системы в R_-^3 — условие (4.2) вместо (4.7).

4.2. Задача о скачке на плоскости.

Пусть $\varepsilon(z) = \{z > 0 : \varepsilon_+; z < 0 : \varepsilon_-\}$. Рассмотрим задачу о скачке: найти решения (E_+, H_+) при $z > 0$ и (E_-, H_-) при $z < 0$ системы уравнений Максвелла с кусочно-постоянным коэффициентом

$$(4.9) \quad \text{rot } H = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(z) E, \quad \text{rot } E = -i\omega \mu_0 \mu H, \quad z \neq 0,$$

принадлежащие классам решений, уходящих от плоскости $z = 0$ на бесконечность и удовлетворяющие на $z = 0$ условиям

$$(4.10) \quad [z_0, E_+ - E_-](x, y, 0) = a(x, y), \quad [z_0, H_+ - H_-](x, y, 0) = b(x, y),$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ — заданные вектор-функции.

Теорема 4.2. *Решение задачи о скачке существует, единственно и*

$$E_{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta \pm \gamma_{\pm}(\xi, \eta)} \left[A \varepsilon_{\pm}(\xi, \eta) + \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\pm}} B(\xi, \eta) h_{\pm}(\xi, \eta) \right],$$

$$H_{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta \pm \gamma_{\pm}(\xi, \eta)} \left[-\frac{1}{\omega\mu_0\mu} B(\xi, \eta) e_{\pm}(\xi, \eta) + A h_{\pm}(\xi, \eta) \right],$$

где

$$e_{\pm}(\xi, \eta) = \frac{\pm \varepsilon_{\mp} \gamma_{\mp} a(\xi, \eta) - \frac{1}{\omega\varepsilon_0} P(\xi, \eta) b(\xi, \eta)}{\varepsilon_+ \gamma_+(\xi, \eta) + \varepsilon_- \gamma_-(\xi, \eta)},$$

$$h_{\pm}(\xi, \eta) = \frac{\frac{1}{\omega\mu_0\mu} P(\xi, \eta) a(\xi, \eta) \pm \gamma_{\mp} b(\xi, \eta)}{\gamma_+(\xi, \eta) + \gamma_-(\xi, \eta)}.$$

Доказательство. Будем искать решение задачи о скачке при $z > 0$ и $z < 0$ как решения вспомогательных задач Коши для верхнего и нижнего полупространств соответственно. Образы Фурье $e_{\pm}(\xi, \eta)$, $h_{\pm}(\xi, \eta)$ предельных значений на плоскости $z = 0$ касательных составляющих векторов E_{\pm} , H_{\pm} должны удовлетворять системе уравнений

$$e_+(\xi, \eta) - e_-(\xi, \eta) = a(\xi, \eta), \quad h_+(\xi, \eta) - h_-(\xi, \eta) = b(\xi, \eta),$$

$$\omega\varepsilon_0 \varepsilon_+ \gamma_+(\xi, \eta) e_+(\xi, \eta) + P(\xi, \eta) h_+(\xi, \eta) = 0,$$

$$\omega\varepsilon_0 \varepsilon_- \gamma_-(\xi, \eta) e_-(\xi, \eta) - P(\xi, \eta) h_-(\xi, \eta) = 0.$$

Решив эту систему линейных алгебраических (векторных) уравнений, получим

$$e_{\pm}(\xi, \eta) = \pm \frac{1}{2} a(\xi, \eta) + e(\xi, \eta), \quad h_{\pm}(\xi, \eta) = \pm \frac{1}{2} b(\xi, \eta) + h(\xi, \eta),$$

где

$$e(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_+ \gamma_+(\xi, \eta) - \varepsilon_- \gamma_-(\xi, \eta)}{\varepsilon_+ \gamma_+(\xi, \eta) + \varepsilon_- \gamma_-(\xi, \eta)} a(\xi, \eta) -$$

$$-\frac{1}{\omega\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_+ \gamma_+(\xi, \eta) + \varepsilon_- \gamma_-(\xi, \eta)} P(\xi, \eta) b(\xi, \eta),$$

$$h(\xi, \eta) = \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \frac{1}{\gamma_+(\xi, \eta) + \gamma_-(\xi, \eta)} P(\xi, \eta) a(\xi, \eta) -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\gamma_+(\xi, \eta) - \gamma_-(\xi, \eta)}{\gamma_+(\xi, \eta) + \gamma_-(\xi, \eta)} b(\xi, \eta).$$

Следствие 4.3. Решение задачи о скачке дает решение задачи о падении электромагнитной волны на плоскую границу раздела сред.

Следствие 4.4. В частном случае, при $\epsilon_{\pm} = \epsilon$ решение задачи о скачке имеет вид

$$E_{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta \pm \gamma(\xi, \eta)} \frac{1}{2} \left[(\pm A + B(\xi, \eta)P(\xi, \eta)) a(\xi, \eta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} AP(\xi, \eta) \mp \gamma(\xi, \eta) B(\xi, \eta) \right) b(\xi, \eta) \right], \\ H_{\pm}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{i}{\zeta \pm \gamma(\xi, \eta)} \frac{1}{2} \left[(\pm A + B(\xi, \eta)P(\xi, \eta)) b(\xi, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \left(\frac{1}{\gamma(\xi, \eta)} AP(\xi, \eta) \mp \gamma(\xi, \eta) B(\xi, \eta) \right) a(\xi, \eta) \right].$$

4.3. Задача дифракции на плоском экране.

Пусть \mathcal{M} – металлический экран, расположенный в плоскости $z = 0$ и \mathcal{N} – его дополнение до всей плоскости. Пусть $\epsilon_{\pm} = \epsilon$, $\mu_{\pm} = \mu$ и $E_0(x, y, z)$ – напряженность электрического поля волны, падающей на экран (удобно считать, что внешнее поле задано и сверху, и снизу). Нужно найти уходящие от плоскости $z = 0$ на бесконечность решения системы уравнений Максвелла в верхнем и в нижнем полупространствах, удовлетворяющие условиям

$$(4.11) \quad [z_0, E_{\pm} + E_0](x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{M},$$

$$(4.12) \quad [z_0, E_+ - E_-](x, y) = 0, \quad [z_0, H_+ - H_-](x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}.$$

Перейдем от задачи дифракции к интегральным уравнениям. Перепишем формулы (4.6) для следов на плоскости $z = 0$ нормальных составляющих напряженностей E_{\pm}, H_{\pm}

$$(4.13) \quad e_{\pm}(x, y) = \mp \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \iint K(x_1, y_1; x, y) h_{\pm}(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

$$(4.14) \quad h_{\pm}(x, y) = \pm \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint K(x_1, y_1; x, y) e_{\pm}(x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Из граничных условий (4.11) следует, что $e_+ = e_- = -e_0$ на \mathcal{M} . Но из условия (4.12) и вне экрана $e_+ = e_-$. Обозначим $e = e_+ = e_-$. Тогда из (4.14) следует, что $h_+ + h_- = 0$ всюду на плоскости $z = 0$, но при этом $h_+ = h_-$ на \mathcal{N} . Поэтому $h_+ = h_- = 0$ на \mathcal{N} , а формулы (4.13) и (4.14) принимают вид

$$(4.15) \quad e(x, y) = \mp \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) h_{\pm}(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

$$(4.16) \quad h_{\pm}(x, y) = \mp \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) e_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \pm \\ \pm \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \iint_{\mathcal{N}} K(x_1, y_1; x, y) e(x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Теперь условия (4.11) можно записать как интегральные уравнения 1-го рода на \mathcal{M}

$$(4.17) \quad \mp \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) h_{\pm}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = -e_0(x, y).$$

Исключая из (4.15) и (4.16) одну из неизвестных функций, получим интегральные уравнения 2-го рода

$$(4.18) \quad e(x, y) + \iint_{\mathcal{N}} e(x_1, y_1) L_M(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1 = \\ = \iint_{\mathcal{M}} e_0(x_1, y_1) L_M(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1, \\ L_M(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{k^2} \iint_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x_2, y_2) K(x_2, y_2; x, y) dx_2 dy_2,$$

$$(4.19) \quad h_{\pm}(x, y) + \iint_{\mathcal{M}} h_{\pm}(x_1, y_1) L_N(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1 =$$

$$= \mp \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} \int \int_{\mathcal{M}} K(x_1, y_1; x, y) \epsilon_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

$$L_N(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{k^2} \int \int_{\mathcal{N}} K(x_1, y_1; x_2, y_2) K(x_2, y_2; x, y) dx_2 dy_2.$$

Теорема 4.3. *Задача дифракции на плоском экране эквивалентна векторным интегральным уравнениям (4.17), (4.18) и (4.19) относительно следов $e^\pm(x, y)$, $h^\pm(x, y)$ на плоскости $z = 0$ нормальных составляющих решений системы Максвелла (E^\pm, H^\pm) .*

Замечание. Интегральное уравнение 1-го рода, эквивалентное задаче дифракции, можно также получить с помощью формул, дающих решение вспомогательной задачи о скачке (Следствие 4.4). Действительно, из сказанного выше следует, что $a(x, y) = e_+(x, y) - e_-(x, y) = 0$ всюду на плоскости $z = 0$, а $b(x, y) = h_+(x, y) - h_-(x, y) = 0$ на \mathcal{N} , но остается неизвестной функцией на \mathcal{M} .

Литература

- [1] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974.
- [2] Нобл Б. Метод Винера-Хопфа, или Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: ИЛ, 1962.
- [3] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996.
- [4] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978.
- [5] Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. On classification of eigen waves of planar, cylindrical and spherical dielectric waveguides // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. Int.

Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2-5, 1998. Vol.2. – P.781–783.

- [6] Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. On solving diffraction problems for the junctions of open waveguides in the classes of distributions // *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. Int. Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2-5, 1998. Vol.2. – P.801- 803.*
- [7] Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения задачи дифракции электромагнитной волны на плоском экране // *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Всеросс. школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова (13-18 сент. 1999 г., г. Казань).* – Казань: Изд-во "Казанск. матем. об-во". Изд-во ДАС. – 1999. С.174–176.
- [8] Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications // *Advances in Equations and Inequalities (A.E.I) (ed. J.M.Rassias).* – Athens, Greece, 1999.
- [9] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. О регуляризации уравнений задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке // *Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.2. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Казанск. матем. об-во. Матер. Всеросс. мол. шк.-конф.* – Казань: УНИПРЕСС, 1999. – С.234–240.
- [10] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. Метод частичных областей для скалярных координатных задач дифракции электромагнитных волн в классах обобщенных функций // *Препринт 2000–1. Казанское матем. об-во.* – Казань, 2000. – 50 с.
- [11] Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. Regularization by the integral identities method for integral and series equations in diffraction problems // *Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2000. Kharkov, Ukraine, Sept. 12-15, 2000. Vol.1. – P.199-201.*
- [12] Maher A., Pleshchinskii N.B. Plane electromagnetic wave scattering and diffraction in a stratified medium // *Proc. Int. Conf.*

Mathematical Methods in Electromagnetic Theory ММЕТ 2000. Kharkov, Ukraine, Sept. 12-15, 2000. Vol.2. – P.426–428.

- [13] Махер А., Плещинский Н.Б. Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскостной среде и ее приложения (в печати).
- [14] Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964.
- [15] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964.
- [16] Шестопапов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971.
- [17] Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973.
- [18] Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984.
- [19] Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984.
- [20] Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. – М.: Отдел вычисл. математики АН СССР, 1983.
- [21] Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977.
- [22] Федорюк М.В. Интегральные преобразования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления / ВИНТИ. – 1986. – 15. – С.211–253.
- [23] Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964.