Карчевский Е.М., Носич А.И., Соловьев С.И.

Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей

Введение

Работа посвящена исследованию качественных свойств спектра (локализация, дискретность, существование, зависимость от неспектральных параметров) диэлектрических волноводов с размытой границей. Анализ исходной спектральной задачи для системы уравнений Максвелла с граничными условиями Свешникова-Рейхардта на бесконечности основан на ее эквивалентном сведении техникой интегральных уравнений к задаче поиска характеристических чисел фредгольмовой голоморфной оператор-функции и использовании результатов общей теории нелинейных спектральных задач.

0.1 Собственные моды диэлектрических волноводов

Спектральная теория диэлектрических волноводов строится на системе однородных уравнений Максвелла:

$$\mathrm{Rot}\mathcal{E} = -\mu\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{Rot}\mathcal{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(x_1, x_2, x_3, t) \quad -$$

векторы напряженности электрического и магнитного поля с координатами $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ соответственно (используется декартова система координат); x_1, x_2, x_3 – пространственные переменные; t – время; $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ – диэлектрическая проницаемость; ε_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства; n – показатель преломления; μ – магнитная проницаемость. Векторная операция Rot, как обычно, определена равенством

$$\mathrm{Rot}\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \partial\mathcal{E}_3/\partial x_2 - \partial\mathcal{E}_2/\partial x_3 \\ \partial\mathcal{E}_1/\partial x_3 - \partial\mathcal{E}_3/\partial x_1 \\ \partial\mathcal{E}_2/\partial x_1 - \partial\mathcal{E}_1/\partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Диэлектрический волновод представляет собой цилиндрическую структуру с показателем преломления, не меняющимся вдоль образующей цилиндра, и являющимся функцией поперечных координат. Предполагается, что волновод является бесконечно длинным и, что он находится в неограниченном пространстве с постоянным показателем преломления. Будем считать, что показатель преломления не зависит от x_3 и является функцией пространственных переменных x_1 и x_2. В дальнейшем символом x будем обозначать вектор с координатами x_1 и x_2. Пусть магнитная проницаемость μ всюду совпадает с магнитной проницаемостью свободного пространства μ_0.

На границах раздела сред, то есть там, где функция n терпит разрывы, должны выполняться так называемые условия сопряжения, согласно которым при переходе через эти границы касательные составляющие векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ непрерывны.

Мы будем изучать собственные моды волноводов, то есть электромагнитные поля без источников, которые могут распространяться вдоль волноводов, имеющие вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix}(x_1, x_2)\exp(i(\beta x_3 - \omega t))\right). \tag{2}$$

Здесь $\omega > 0$ – заданная частота электромагнитных колебаний. Неизвестными являются E и H – комплексные амплитуды векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, а также комплексный параметр β, который называется постоянной распространения.

Задачи о собственных модах диэлектрических волноводов являются спектральными задачами поиска при заданном ω таких значений β, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений Максвелла (1), имеющие вид (2), удовлетворяющие условиям сопряжения и соответствующим условиям на бесконечности в плоскости поперечного сечения волновода. Известные формулировки таких задач различаются условиями на бесконечности и, следовательно, функциональными пространствами, в которых разыскиваются их решения. Как будет показано ниже это ограничивает также область, где могут лежать комплексные собственные значения β.

0.2 Круговой волновод с постоянным показателем преломления и условия на бесконечности

Исторически первыми были исследованы диэлектрические волноводы кругового поперечного сечения с функцией n принимающей постоянные значения в области волновода и в окружающей среде. В этом случае исходная спектральная задача методом разделения переменных легко сводится к семейству трансцендентных уравнений относительно β (см., например, [1]). Следуя [1], кратко повторим вывод этих уравнений. Пусть R – радиус волновода, $n_\infty > 0$ – показатель преломления окружающей среды и $n_+ > n_\infty$ – показатель преломления волновода. Как будет показано ниже, в каждой области, где показатель преломления принимает постоянное значение, комплексные амплитуды E и H удовлетворяют уравнению Гельмгольца. А именно,

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_+^2 - \beta^2\right)\right] \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = 0, \quad |x| < R, \tag{3}$$

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = 0, \quad |x| > R, \tag{4}$$

где $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$. Применяя для решения этих уравнений метод разделения переменных, получим

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{A_n} \\ \mathrm{B_n} \end{bmatrix} H_n^{(1)}(\chi r) \exp(in\varphi), \quad |x| > R, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{C_n} \\ \mathrm{D_n} \end{bmatrix} J_n(\rho r) \exp(in\varphi), \quad |x| < R.$$

Здесь $\chi = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$, $\rho = \sqrt{k^2 n_+^2 - \beta^2}$; r, φ – полярные координаты вектора x; $H_n^{(1)}(\chi r)$ – функции Ханкеля степени n

первого рода, $J_n(\rho r)$ – функции Бесселя степени n [2]. В этих разложениях учтено, что искомые функции не должны иметь особенностей и на бесконечности они ведут себя, как $H_n^{(1)}(\chi r)$.

Из условий сопряжения приходим к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_n, B_n, C_n, D_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Коэффициенты матрицы этой системы нелинейно зависят от β. Матрица имеет блочно-диагональную структуру, такую, что исходная система распадается на бесконечное количество независимых систем из четырех уравнений. Если при некотором β определитель какой-либо из этих систем обращается в нуль, то она имеет нетривиальное решение, определяющее собственную моду волновода. Из условия равенства нулю соответствующих определителей мы приходим к семейству трансцендентных уравнений для определения β:

$$\left(n_+^2 \chi R \frac{J_n'(\rho R)}{J_n(\rho R)} + n_\infty^2 \rho R \frac{H_n^{(1)'}(\chi R)}{H_n^{(1)}(\chi R)}\right) \times \tag{6}$$

$$\times \left(\chi R \frac{J_n'(\rho R)}{J_n(\rho R)} + \rho R \frac{H_n^{(1)'}(\chi R)}{H_n^{(1)}(\chi R)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\beta k (n_+^2 - n_\infty^2) n}{\rho \chi}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Эти уравнения в теории волноводов носят название дисперсионных. Качественные свойства спектра могут быть изучены в данном случае на основе анализа дисперсионных уравнений с помощью результатов теории функций комплексного переменного и свойств функций Бесселя и Ханкеля.

Ранее всех были исследованы поверхностные волны (их амплитуды экспоненциально убывают на бесконечности), отвечающие вещественными постоянными распространения $\beta \in (kn_\infty, kn_+)$. При этом считалось, что только при таких β уравнения (6) имеют решения, а физический смысл имеют только моды с убывающими на бесконечности амплитудами. Отметим, что такое поведение амплитуд обеспечивается при $\beta > kn_\infty$ свойствами функций $H_n^{(1)}(\chi r)$, если предположить, что $\mathrm{Im}\chi > 0$.

Позже было показано, что поверхностные волны с изменением $\omega > 0$ могут превращаться в так называемые вытекающие волны (их амплитуды экспоненциально возрастают на бесконечности), с постоянными распространения β, "мигрирующими" с вещественной оси в комплексную плоскость [3]. В [3] было замечено, что вытекающие волны могут быть исследованы как решения спектральной задачи с более слабым условием на бесконечности (которое однако не было сформулировано четко). Это привело к рассмотрению постоянных распространения поверхностных волн, как точек, лежащих на так называемом "физическом" листе двулистной римановой поверхности функции $\chi(\beta)$ (этот лист определяется условием $\mathrm{Im}\chi \geq 0$), а постоянных распространения вытекающих волн, – как точек на "не физическом" листе этой поверхности (который определяется условием $\mathrm{Im}\chi < 0$). Несколько позже было открыто [4], что на "физическом" листе вне вещественной оси также могут находиться постоянные распространения поверхностных волн кругового диэлектрического волновода.

В статье [5] аналогичные результаты были получены численно для ряда волноводов, отличных от кругового. Было показано, что все перечисленные выше типы собственных мод могут трансформироваться друг в друга вследствие изменения формы волновода, его показателя преломления, показателя преломления окружающей среды и частоты ω.

Все это привело к необходимости поставить для амплитуд собственных мод произвольного волновода наиболее общее условие на бесконечности, которому удовлетворяли бы все известные решения. Таким условием является условие излучения Свешникова-Рейхардта [6], [7]. Согласно которому вне некоторого круга, содержащего область изменения функции n, вектора E и H должны разлагаться в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды вида (5). При этом значения постоянных распространения β разыскиваются на римановой поверхности Λ функции $\ln(\chi(\beta))$. Это обусловлено тем, что для всех n функции Ханкеля представимы в виде сумм:

$$H_n^{(1)}(\chi r) = \ln(\chi r) + R_n^{(1)}(\chi r),$$

где $R_n^{(1)}(\chi r)$ – регулярные однозначные функции своего аргумента. Такая постановка условия на бесконечности и определение области поиска значений β широко используется в последние годы при формулировке волноводных задач. В связи с этим отметим, например, работу [8], где анализировался спектр щелевых и полосковых линий, [9], где изучались векторные функции Грина произвольных открытых волноводов с компактным поперечным сечением, и [10], [11], посвященные диэлектрическим волноводам произвольного поперечного сечения с постоянным показателем преломления.

0.3 Элементы спектральной теории оператор-функций

В случае произвольного распределения показателя преломления и и произвольной формы поперечного сечения волновода естественно нельзя использовать метод разделения переменных. Одним из активно развивающихся в последнее время подходов к математическому решению спектральных задач теории дифракции является их эквивалентное сведение с помощью техники интегральных уравнений к задачам поиска характеристических чисел фредгольмовых голоморфных оператор-функций (см., например, [8] - [12]). Их исследование опирается на общую теорию нелинейных спектральных задач, развитую в работах [13], [14].

Дадим ряд определений и сформулируем необходимые нам результаты [13], [14]. Пусть Λ - открытая связная область комплексной плоскости β. Оператор-функцией на банаховом пространстве X называется функция $A(\beta)$, значениями которой являются линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y, определенные при каждом $\beta \in \Lambda$.

Оператор-функция $A(\beta)$ называется голоморфной в точке $\beta_0 \in \Lambda$, если существует такое $p > 0$, что при любом β, $|\beta - \beta_0| < p$, оператор $A(\beta)$ допускает разложение в сходящийся по норме операторов ряд

$$A(\beta) = A(\beta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta - \beta_0)^m A_m.$$

Обозначим $\rho(A) = \{\beta : \beta \in \Lambda, \ \exists A(\beta)^{-1} : Y \to X\}$ - множество регулярных точек оператора $A(\beta)$, $\sigma(A) = \Lambda \setminus \rho(A)$ - множество сингулярных точек оператора $A(\beta)$ (это множество называют также характеристическим).

Оператор A называется фредгольмовым, если он представим в виде суммы двух операторов, один из которых непрерывно обратим, а второй вполне непрерывен.

Ненулевая функция $v \in X$ называется собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta \in \Lambda$, если выполнено уравнение

$$A(\beta)v = 0. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема (см. [13], стр. 39).

Теорема 1 *Пусть выполнены условия:*

1. *Λ - область (открытое связное множество) в комплексной плоскости, $A(\beta)$ - голоморфная на Λ оператор-функция.*

2. *При каждом фиксированном $\beta \in \Lambda$ оператор $A(\beta)$ фредгольмов.*

3. *Множество $\rho(A) \neq \oslash$, т. е. $\sigma(A) \neq \Lambda$.*

Тогда множество $\sigma(A)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции $A(\beta)$.

Пусть $A(\beta, \omega)$ – оператор-функция двух параметров $\beta \in \Lambda$ и $\omega \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел. Исследование зависимости характеристических значений β от неспектрального параметра ω может быть проведено с помощью следующей теоремы [14].

Теорема 2 *Пусть выполнены условия:*

1. *Λ - область (открытое связное множество) в комплексной плоскости. При каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}$ оператор-функция $A(\beta)$ голоморфна по $\beta \in \Lambda$. Оператор-функция $A(\beta, \omega)$ непрерывна по $(\beta, \omega) \in \Lambda \times \mathbb{R}$.*

2. *При каждом фиксированном $\beta \in \Lambda$ и $\omega \in \mathbb{R}$ оператор $A(\beta, \omega)$ фредгольмов.*

3. *Для любого $\omega \in \mathbb{R}$ множество $\rho(A) \neq \oslash$, т. е. $\sigma(A) \neq \Lambda$.*

Тогда каждое характеристическое значение β оператор-функции $A(\beta)$ непрерывно зависит от параметра $\omega \in \mathbb{R}$. Кроме того, с изменением $\omega \in \mathbb{R}$ характеристические значения оператор-функции $A(\beta)$ могут появляться и исчезать только на границе области Λ.

Отметим, что эти результаты носят локальный характер и, следовательно, справедливы и в том случае, когда Λ – не область комплексной плоскости, а риманова поверхность.

Таким образом, схема применения теорем 1 и 2 к изучению конкретной спектральной задачи может состоять из следующих этапов:

1. Дать корректное и наиболее общее определение ее решения.

2. Эквивалентным образом (например, используя технику интегральных уравнений) свести ее к задаче для некоторой оператор-функции.

3. Исследовать такие свойства этой оператор-функции, как голоморфность по спектральному параметру, непрерывность как функции спектрального и неспектральных параметров, фредгольмовость при фиксированных значениях параметров.

4. Доказать, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярное множество этой оператор-функции не пусто. Для этого следует исследовать локализацию спектра исходной спектральной задачи и воспользоваться эквивалентностью этой задачи и задачи для оператор-функции.

0.4 Структура работы

В настоящей работе описанный выше подход применяется к математическому исследованию спектра собственных мод диэлектрических волноводов с размытой границей. Показатель преломления таких волноводов является гладкой функцией во всей плоскости поперечного сечения и нигде не терпит разрывов. Задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических структурах с размытой границей, то есть не имеющих четкой границы раздела сред, привлекают в последние годы большое внимание (см., например, [15] и цитированную там литературу). В частности, при постановке спектральных задач теории диэлектрических волноводов, часто делается предположение о том, что характеристики волновода плавно переходят в характеристики окружающей среды (см., например, [9], [5]). Эта модель наиболее адекватна для естественных, природных волноводов и для искусственных волноводов, изготовленных методом диффузии.

Отметим, что ранее в статьях [10], [11] результаты спектральной теории оператор-функций применялись к исследованию качественных свойств спектра диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения с постоянным показателем преломления. При этом использовались контурные интегральные уравнения по границе поперечного сечения волноводов. В настоящей работе применяются интегральные уравнения по площади их поперечного сечения.

Работа состоит из введения и 6 параграфов. В первом параграфе выписываются уравнения, которым должны удовлетворять комплексные амплитуды собственных мод, приводятся некоторые известные формулы векторного анализа, а также доказывается вспомогательный результат о том, что в области с постоянным показателем преломления амплитуды собственных мод являются решением уравнения Гельмгольца. Далее конструируется скалярное уравнение Гельмгольца, которому должны удовлетворять амплитуды собственных мод при так называемом приближении слабонаправляющего волновода [1], [16], справедливого для волноводов со слабо меняющимся в плоскости поперечного сечения показателем преломления.

Второй параграф посвящен поведению амплитуд собственных мод на бесконечности. Формулируется условие излучения Свешникова-Рейхардта для решений уравнения Гельмгольца. Описывается риманова поверхность, на которой лежат постоянные распространения β.

В третьем параграфе решается задача о собственных модах слабонаправляющего волновода. С одной стороны, она представляет самостоятельный интерес, а с другой, в определенном смысле является модельной по отношению к векторной задаче в полной электродинамической постановке. На ее примере иллюстрируются основные идеи, которые используются позже для изучения свойств спектра более сложной и общей задачи. Кроме того, на основе методики, аналогичной [17], доказывается, что скалярная задача имеет по крайней мере одно простое вещественное положительное собственное значение, которому отвечает положительная собственная функция. Результаты четвертого параграфа опубликованы в [18].

В четвертом параграфе доказывается теорема о локализации на римановой поверхности спектра задачи о собственных модах волновода с размытой границей. Доказательство основано на формуле Грина, и в ходе него существенным образом используется условие излучения Свешникова-Рейхардта.

В пятом параграфе строятся электромагнитные потенциалы для собственных мод волновода: векторный, скалярный и поляризационный. Изложение аналогично [19], где построены подобные потенциалы, через которые выражаются решения неоднородной системы уравнений Максвелла без предположения о гармонической зависимости поля от x_3 и t.

В последнем, шестом параграфе с помощью интегрального представления собственных мод, основанного на электромагнитных потенциалах, исходная задача сводится к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. Доказывается эквивалентность этих задач, а также то, что оператор-функция является фредгольмовой, голоморфна по β и непрерывна как функция β и ω. Отметим, что возникающее при этом интегральное уравнение, использовалось еще в [20] для анализа асимптотических свойств β и позднее в [21] для построения численного метода, но, указанные выше качества этого уравнения, не исследовались. В итоге, с помощью теорем 1 и 2 доказывается, что спектр исходной задачи может состоять лишь из изолированных точек; каждое собственное значение β непрерывно зависит от ω и может появляться и исчезать с изменением ω лишь на границе римановой поверхности.

1 Уравнения для амплитуд собственных мод

Построим уравнения, которым удовлетворяют комплексные амплитуды собственных мод цилиндрических диэлектрических волноводов с размытой границей.

Обозначим символом $\mathbb{R}^2$ плоскость поперечного сечения волновода $\{x_3 = \text{const}\}$. Обозначим $C^2(\mathbb{R}^2)$ пространство комплекснозначных дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^2$ функций. Пусть Ω - ограниченная, не обязательно односвязная область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Относительно показателя преломления волновода n предположим следующее: n не зависит от x_3; $n = n_\infty = \text{const}$ при $x \notin \Omega$; $n_+ = \max_{x\in\Omega} n(x) > n_\infty > 0$; n - вещественная функция из $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Подставляя векторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ вида 2 в уравнения Максвелла 1, получим следующую систему уравнений:

$$\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{E} = i\omega\mu_0 \mathrm{H}, \quad \mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathrm{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

где векторная операция Rot_β определена равенством

$$\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{F} = \begin{bmatrix} \partial \mathrm{F}_3/\partial x_2 - i\beta \mathrm{F}_2 \\ i\beta \mathrm{F}_1 - \partial \mathrm{F}_3/\partial x_1 \\ \partial \mathrm{F}_2/\partial x_1 - \partial \mathrm{F}_1/\partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Решения E, H системы (8) будем разыскивать в пространстве $\left[C^2(\mathbb{R}^2)\right]^3$.

Пусть $F \in \left[C^2(\mathbb{R}^2)\right]^3$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Введем дифференциальные операторы:

$$\mathrm{Div}_\beta \mathrm{F} = \partial \mathrm{F}_1/\partial x_1 + \partial \mathrm{F}_2/\partial x_2 + i\beta \mathrm{F}_3,$$

$$\Delta\varphi = \partial^2\varphi/\partial x_1^2 + \partial^2\varphi/\partial x_2^2,$$

$$\mathrm{Grad}_\beta\varphi = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ i\beta\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathrm{grad}\varphi = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями легко проверить справедливость следующих формул векторного анализа:

$$\mathrm{Div}_\beta\left(\mathrm{Grad}_\beta\varphi\right) = \Delta\varphi - \beta^2\varphi, \tag{9}$$

$$\mathrm{Div}_\beta\left(\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{F}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\mathrm{Div}_\beta\left(\varphi \mathrm{F}\right) = \varphi \mathrm{Div}_\beta \mathrm{F} + \left(\mathrm{F}, \mathrm{grad}\varphi\right), \tag{11}$$

$$\mathrm{Rot}_\beta\left(\mathrm{Grad}_\beta\varphi\right) = 0, \tag{12}$$

$$\mathrm{Rot}_\beta\left(\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{F}\right) = -\Delta \mathrm{F} + \beta^2 \mathrm{F} + \mathrm{Grad}_\beta\left(\mathrm{Div}_\beta \mathrm{F}\right), \tag{13}$$

$$\Delta\left(\mathrm{Div}_\beta \mathrm{F}\right) = \mathrm{Div}_\beta\left(\Delta \mathrm{F}\right). \tag{14}$$

где

$$(\mathrm{F}, \mathrm{L}) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{F}_i \mathrm{L}_i, \quad \mathrm{F}, \mathrm{L} \in \left[\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)\right]^3.$$

Лемма 1 *Пусть* E, H *- решение системы (8). Тогда для всех* x *из* $\mathbb{R}^2$ *справедливы следующие равенства:*

$$\mathrm{Rot}_\beta\left(\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{E}\right) = k^2 n^2 \mathrm{E}, \tag{15}$$

$$\mathrm{Rot}_\beta\left(n^{-2}\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H}\right) = k^2 \mathrm{H}, \tag{16}$$

$$\mathrm{Div}_\beta\left(n^2 \mathrm{E}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\mathrm{Div}_\beta\left(\mathrm{H}\right) = 0, \tag{18}$$

где $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$.

Равенства (15) и (16) легко получить, применив операцию Rot_β к уравнениям (8). Для того, чтобы получить равенства (17) и (18), надо применить к уравнениям (8) операцию Div_β и воспользоваться формулой (10).

Лемма 2 *Пусть* E, H *- решение системы (8). Тогда в* $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ *функции* E *и* H *удовлетворяют уравнению Гельмгольца*

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = 0. \tag{19}$$

Заметим, что при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ функция n принимает постоянное значение n_∞, и равенство (19) вытекает из уравнений (15), (16) и формулы (13).

Сконструируем теперь уравнения, которым удовлетворяют собственные моды в приближении слабонаправляющего волновода [1], [16], которое широко применяется для исследования цилиндрических диэлектрических волноводов со слабо меняющимся в плоскости поперечного сечения показателем преломления. В этом случае удобно воспользоваться выражением компонент комплексных амплитуд E и H через составляющие H_1 и H_2 [16]:

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}_3 = \frac{1}{i\varepsilon\omega}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_1}\right), \quad \mathrm{H}_3 = \frac{-1}{i\beta}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_2}\right), \\
\mathrm{E}_1 = \frac{\mu_0\omega}{\beta}\mathrm{H}_2 - \frac{1}{\omega\beta\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_1}\right), \\
\mathrm{E}_2 = -\frac{\mu_0\omega}{\beta}\mathrm{H}_1 - \frac{1}{\omega\beta\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_1}\right).
\end{gathered} \tag{20}$$

Эти представления легко получить из системы уравнений (8). Из (8) также следует, что составляющие H_1 и H_2 для всех x из $\mathbb{R}^2$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений [16]:

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] \mathrm{H}_1 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] \mathrm{H}_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial x_1}\right).$$

Вследствие того, что у слабонаправляющего волновода показатель преломления мало меняется в плоскости $\mathbb{R}^2$, правыми частями в этой системе можно пренебречь. Таким образом, H_1 и H_2 во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] \begin{bmatrix} \mathrm{H}_1 \\ \mathrm{H}_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{21}$$

2 Поведение амплитуд собственных мод на бесконечности

Для корректной постановки задачи о собственных модах волноводов необходимо поставить определенные условия на бесконечности, которым должны удовлетворять функции E и H. В силу леммы 2 вне области Ω решения системы уравнений (8) удовлетворяют уравнению Гельмгольца (19). Уравнение приближения слабонаправляющего волновода (21) вне области Ω также совпадает с уравнением Гельмгольца (19). Наиболее общим условием на бесконечности для такого уравнения является условие излучения Свешникова-Рейхардта [6], [7]. Оно широко применяется при постановке волноводных задач (см., например, [8], [9] и цитированную там литературу).

Пусть R_0 – достаточно большое положительное число, такое, что область Ω целиком помещается в круг $\Omega_{R_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le R_0\right\}$. Обозначим Γ_{R_0} границу этого круга.

Определение 1 *Будем говорить, что функции* E *и* H *удовлетворяют условию излучения Свешникова-Рейхардта, если для любого* x*, такого, что* $|x| \ge R_0$*, функции* E *и* H *разлагаются в* *равномерно и абсолютно сходящийся ряд*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{A_n} \\ \mathrm{B_n} \end{bmatrix} H_n^{(1)}(\chi r) \exp(in\varphi) . \tag{22}$$

Прокомментируем теперь смысл этого условия. Решим уравнение Гельмгольца (19) в области $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ методом разделения переменных. Получим, что для любого x, такого, что $|x| \geq R_0$, справедливо следующее разложение в ряд [22]:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{A_n} \\ \mathrm{B_n} \end{bmatrix} H_n^{(1)}(\chi r) \exp(in\varphi) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{C_n} \\ \mathrm{D_n} \end{bmatrix} H_n^{(2)}(\chi r) \exp(in\varphi) .$$

Здесь $H_n^{(2)}(\chi r)$ – функции Ханкеля степени n второго рода [2]. Функции Ханкеля являются многозначными. Для того, чтобы представить их, как однозначные аналитические функции комплексного переменного β, мы будем рассматривать их определенными на римановой поверхности Λ функции $\ln(\chi(\beta))$. Это продиктовано тем, что для всех n функции Ханкеля представимы в виде сумм:

$$H_n^{(1)}(\chi r) = \ln(\chi r) + R_n^{(1)}(\chi r) ,$$
$$H_n^{(2)}(\chi r) = \ln(\chi r) + R_n^{(2)}(\chi r) ,$$

где $R_n^{(1)}(\chi r)$, $R_n^{(2)}(\chi r)$ – регулярные однозначные функции своего аргумента. Поверхность Римана Λ состоит из бесконечного числа листов. Главный ("физический") лист $\Lambda_0^{(1)}$ определяется условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \mathrm{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}.$$

Функции $H_n^{(1)}(\chi r)$ и $H_n^{(2)}(\chi r)$ при $r \to \infty$, $-\pi/2 < \arg \chi < 3\pi/2$, имеют следующую асимтотику:

$$H_n^{(1)}(\chi r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi r}} \exp\left[i\left(\chi r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\chi r}\right)\right] , \tag{23}$$

$$H_n^{(2)}(\chi r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi r}} \exp\left[-i\left(\chi r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\chi r}\right)\right] .$$

Условие излучения Свешникова-Рейхардта ограничивает множество всех возможных решений уравнения Гельмгольца так, чтобы на главном листе $\Lambda_0^{(1)}$ римановой поверхности Λ находились постоянные распространения β, отвечающие поверхностным волнам (экспоненциально убывающим на бесконечности функциям E и H).

Риманова поверхность Λ имеет две точки разветвления kn_∞ и $-kn_\infty$. С листом $\Lambda_0^{(1)}$ вдоль разреза, выбранным исходя из условия $\mathrm{Im}(\chi(\beta)) = 0$ (то есть проходящим по мнимой оси и интервалу $(-kn_\infty, kn_\infty)$ вещественной оси), соединен лист $\Lambda_0^{(2)}$. Этот лист называется "не физическим" и определяется условиями

$$-\pi/2 < \arg\chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \mathrm{Im}(\chi(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}.$$

Согласно асимптотике (23) на листе $\Lambda_0^{(2)}$ находятся постоянные распространения β, отвечающие вытекающим волнам (экспоненциально возрастающим на бесконечности функциям E и H). Вдоль разреза, проходящего по вещественной оси, и соединяющего точки kn_∞ и $-kn_\infty$ через бесконечно удаленную точку, к листу $\Lambda_0^{(2)}$ присоединены листы $\Lambda_m^{(1)}$, $\Lambda_m^{(2)}$, $m = \pm1, \pm2, \ldots$ Эти листы определяются следующими условиями:

$$-\pi/2 + 2\pi m < \arg\chi(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \quad \mathrm{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(1)},$$
$$-\pi/2 + 2\pi m < \arg\chi(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \quad \mathrm{Im}(\chi(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_m^{(2)}.$$

Из известного разложения

$$H_n^{(1)}(\chi\exp(i2\pi m)r) = \alpha_n^{(m)} H_n^{(1)}(\chi r) + \gamma_n^{(m)} H_n^{(2)}(\chi r), \quad \alpha_n^{(m)}, \gamma_n^{(m)} \neq 0,$$

справедливого для $m \neq 0$, всех n и $\beta \in \bigcup\limits_{m\neq0}\left(\Lambda_m^{(1)} \bigcup \Lambda_m^{(2)}\right)$, а также асимптотики (23) следует, что постоянным распространения β, лежащим на листах $\Lambda_m^{(1)}$, $\Lambda_m^{(2)}$, $m = \pm1, \pm2, \ldots$ отвечают функции E и H, представляющие собой суммы поверхностных и вытекающих волн.

Отметим, что, как доказано в работе [22], для функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (19) условие (22) при $\beta \in \Lambda_0^{(1)*}$ эквивалентно условию Зоммерфельда:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\chi\right)\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \exp(i\chi r)\, o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty.$$

3 Собственные моды слабонаправляющего волновода

В этом параграфе на примере исследования скалярной задачи для уравнения (21) мы проиллюстрируем основные идеи, которые будут использованы позже при изучении свойств спектра более сложной задачи в векторной постановке.

3.1 Постановка задачи

Сформулируем задачу о собственных модах слабонаправляющего волновода. Функции H_1 и H_2 удовлетворяют уравнению (21), которое распадается на два независимых скалярных уравнения. Обозначим через u одну из функций H_1 или H_2. Уравнение (21) запишем в виде

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

Потребуем от функции u чтобы она удовлетворяла условию излучения Свешникова-Рейхардта. А именно, пусть для любого x, такого, что $|x| \geq R_0$, функция u разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, H_n^{(1)}(\chi r) \exp(in\varphi). \tag{25}$$

Определение 2 *Ненулевую функцию $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ будем называть собственной функцией задачи (24), (25), отвечающей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (24), (25). Спектром задачи (24), (25) будем называть множество ее собственных значений.*

Если известна собственная функция u задачи (24), (25), отвечающая собственному значению β, то собственная мода слабонаправляющего волновода определяется по формулам (2), где $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = u$, а компоненты H_3, E_1, E_2 и E_3 имеют вид (20).

3.2 Локализация спектра

Сформулируем и докажем теорему о локализации на римановой поверхности Λ спектра задачи (24), (25). Обозначим через G

объединение двух интервалов на вещественной оси листа $\Lambda_0^{(1)}$:

$$G = \left\{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \mathrm{Im}\beta = 0, kn_\infty < |\beta| < kn_+\right\}.$$

Обозначим через B отрезок вещественной оси листа $\Lambda_0^{(1)}$:

$$B = \left\{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \mathrm{Im}\beta = 0, |\beta| \geq kn_+\right\}$$

Обозначим через D разрез, вдоль которого соединены листы $\Lambda_0^{(1)}$ и $\Lambda_0^{(2)}$:

$$D = \left\{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \mathrm{Re}\beta = 0\right\} \bigcup \left\{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \mathrm{Im}\beta = 0, |\beta| < kn_\infty\right\}$$

Теорема 3 *На $\Lambda_0^{(1)}$ собственные значения задачи (24), (25) могут лежать лишь в области G.*

Доказательство. Пусть u – собственная функция задачи (24), (25), отвечающая собственному значению $\beta \in D$. Применим в области Ω_R, $R \geq R_0$, к функциям u и $\overline{u}$ (здесь $\overline{u}$ означает функцию комплексно-сопряженную с u) формулу Грина:

$$\int\limits_{\Omega_R} (u\Delta\overline{u} - \overline{u}\Delta u)dx = \int\limits_{\Gamma_R} \left(u\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right)dx.$$

Получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma_R} \left(u\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} - \overline{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right)dx = 0, \quad R \geq R_0,$$

так как $k^2n^2 > \beta^2$ при $\beta \in D$. Отсюда, используя условие (25) и ортогональность тригонометрических функций, для любого $R \geq R_0$ получим:

$$2\pi\chi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H_n^{(1)}(\chi R)\, H_n^{(2)\prime}(\chi R) - H_n^{(2)}(\chi R)\, H_n^{(1)\prime}(\chi R)\right] |a_n|^2 = 0.$$

Хорошо известно (см., например, [2]), что выражение, стоящее в этой сумме в квадратных скобках, от n не зависит, а именно

$$H_n^{(1)}(\chi R)\, H_n^{(2)\prime}(\chi R) - H_n^{(2)}(\chi R)\, H_n^{(1)\prime}(\chi R) = \frac{4}{i\pi\chi R},$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ все коэффициенты a_n в разложении (25) обращаются в нуль. А это значит, что $u = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$. Оператор Гельмгольца (24) имеет внутри Ω_{R_0} фундаментальное решение. Поэтому, используя третью формулу Грина, выражающую решение уравнения (24) в Ω_{R_0} через значение решения и его нормальной производной на Γ_{R_0} (см., например, [19]), найдем, что $u = 0$ при $x \in \Omega_{R_0}$. Итак, задача (24), (25) при $\beta \in D$ имеет только тривиальное решение.

При остальных $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ из условий (24), (25) и асимптотической формулы (23) нетрудно получить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{grad} u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\beta^2 - k^2 n^2)|u|^2 dx = 0. \tag{26}$$

Для этого надо применить в Ω_R формулу Грина:

$$\int_{\Omega_R} (\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} \overline{u})\, dx + \int_{\Omega_R} \overline{u} \Delta u dx = \int_{\Gamma_R} \overline{u} \frac{\partial u}{\partial r} dx$$

и устремить R к бесконечности. При этом надо учесть, что согласно асимптотике (23), все подынтегральные выражения в этой формуле экспоненциально убывают на бесконечности при любом $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$. При вещественных β, лежащих на отрезке B, равенству (26) удовлетворяет лишь нулевая функция u. Действительно, если $\beta \in B$ и $|\beta| > kn_+$, то из этого равенства сразу вытекает, что $u = 0$ на всей плоскости. А, если $\beta \in B$ и $|\beta| = kn_+$, то из него следует, что $\mathrm{grad} u = 0$ в $\mathbb{R}^2$, то есть u всюду принимает постоянное значение. Но из (23) вытекает, что на бесконечности u обращается в нуль. Значит u равняется нулю всюду. Возьмем от левой и правой частей равенства (26) мнимую часть. Получим

$$\mathrm{Im} \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx = 0.$$

Следовательно, собственные значения β задачи (24), (25) на $\Lambda_0^{(1)}$ не могут иметь одновременно мнимую и вещественную части отличными от нуля, то есть принадлежать множеству $\Lambda_0^{(1)} \setminus (B \bigcup D \bigcup G)$. Теорема доказана.

3.3 Нелинейная спектральная задача для интегральной оператор-функции

Для изучения качественных свойств спектра сведем задачу (24), (25) к спектральной задаче для интегральной фредгольмовой голоморфной по $\beta \in \Lambda$ и непрерывной по $\beta \in \Lambda$ и $\omega > 0$ оператор-функции.

Лемма 3 *Пусть u - собственная функция задачи (24), (25), отвечающая собственному значению $\beta \in \Lambda$. Тогда*

$$u(x) = (B(\beta)u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{27}$$

где $(B(\beta)u)(x) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\beta; x, y)\, p(y) u(y) dy, \;\; p(y) = k^2 n^2(y) - k^2 n_\infty^2,$

$$\Phi(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\beta)\,|x-y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \; y \in \Omega.$$

Доказательство. Запишем уравнение (24) формально в виде неоднородного уравнения:

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] u = -f, \quad f = pu.$$

Далее рассуждения проводятся стандартным образом (см., например, [23]) с помощью формулы Грина и известного равенства (см. [8], с. 35; [7]; [22])

$$\int\limits_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial |y|} \Phi(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial |y|} u(y) dy \right) = 0, \quad R \geq R_0,$$

справедливого для любого $\beta \in \Lambda$ и произвольной $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей условию (25). Отметим также, что фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, $\Phi(\beta; x, y)$, удовлетворяет условию излучения Свешникова-Рейхардта (25) при любом $\beta \in \Lambda$. В этом легко убедиться с помощью теоремы сложения Графа [24], с. 201. Лемма доказана.

При фиксированном $\beta \in \Lambda$ положим

$$(K(\beta)v)(x) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\beta; x, y) p^{1/2}(x) p^{1/2}(y) v(y) dy. \tag{28}$$

Будем рассматривать оператор $K(\beta)$, как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций $L_2(\Omega)$. Пусть

$$A(\beta) = I - K(\beta),$$

где I – единичный оператор в $L_2(\Omega)$. При всех $\beta \in \Lambda$ ядро оператора $K(\beta)$ слабополярно, следовательно, оператор $\Lambda(\beta)$ фредгольмов.

Определение 3 *Ненулевую функцию $v \in L_2(\Omega)$ будем называть собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta \in \Lambda$, если выполнено уравнение*

$$A(\beta)v = 0. \tag{29}$$

Характеристическим множеством оператор-функции $A(\beta)$ будем называть множество чисел $\beta \in \Lambda$, для которых оператор $A(\beta)$ не имеет ограниченного обратного в $L_2(\Omega)$.

Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных модах слабонаправляющего волновода (24), (25) и спектральной задачи (29) для оператор-функции $A(\beta)$.

Теорема 4 *Если $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ является собственной функцией задачи (24), (25), отвечающей собственному значению $\beta_0 \in \Lambda$, то $v = p^{1/2}u \in L_2(\Omega)$ есть собственная функция оператор-функции $A(\beta)$, отвечающая характеристическому значению β_0. Если $v \in L_2(\Omega)$ является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta_0 \in \Lambda$, то $u = B(\beta_0)\left(p^{-1/2}v\right) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ есть собственная функция задачи (24), (25), отвечающая собственному значению β_0.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3. Докажем второе утверждение. Пусть $v \in L_2(\Omega)$ – собственная функция оператор-функции $A(\beta)$, отвечающая характеристическому значению $\beta_0 \in \Lambda$. Ядро $\Phi(\beta; x, y)$ слабополярно при любом $\beta \in \Lambda$. Следовательно, функция $u = B(\beta_0)\left(p^{-1/2}v\right)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ (см., например, [25], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., например, [25], с.

463) функция u дважды непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$; число β_0 и функция u удовлетворяют уравнению (24). С помощью теоремы сложения Графа (см., например, [24], с. 201) нетрудно убедиться, что число β_0 и функция u удовлетворяют условию (25). Теорема доказана.

Следующая теорема описывает качественные свойства спектра задачи (24), (25).

Теорема 5 *Спектр задачи (24), (25) может состоять лишь из изолированных точек. Каждое собственное значение задачи (24), (25) непрерывно зависит от $\omega > 0$ и может появляться и исчезать с изменением ω лишь на границе римановой поверхности Λ, то есть на бесконечности и в точках $\pm kn_\infty$.*

Доказательство. Рассуждая аналогично [8], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция $A(\beta)$ голоморфна по $\beta \in \Lambda$ и непрерывна как функция двух переменных $\beta \in \Lambda$ и $\omega > 0$. В силу фредгольмовости оператора $A(\beta)$, теоремы 3 о локализации спектра задачи (24), (25) и теоремы 4 о спектральной эквивалентности задач (24), (25) и (29) оператор $A(\beta)$ обратим для любого $\omega > 0$ и $\beta \in \Lambda_0^{(1)} \setminus G$. Таким образом, из теорем 1 и 2 вытекает, что характеристическое множество оператор-функции $A(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся ее характеристическими значениями; каждое характеристическое значение β непрерывно зависит от $\omega > 0$ и может появляться и исчезать с изменением ω лишь на границе римановой поверхности Λ, то есть на бесконечности и в точках $\pm kn_\infty$. Отсюда и из спектральной эквивалентности (теорема 4) следует справедливость теоремы.

3.4 Существование собственных значений

Теорема 6 *Задача (24), (25) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение β, лежащее в области G, которому отвечает положительная собственная функция.*

Доказательство. Пусть оператор $K(\beta)$ при фиксированных $\beta \in G$ определяется равенством (28) и действует в пространстве вещественных функций $L_2(\Omega)$. При фиксированных $\beta \in G$

введем в рассмотрение задачу

$$v = \gamma K(\beta) v.$$

Решения этой задачи $\gamma = \gamma(\beta)$ и $v \neq 0$ называются характеристическим значением и собственной функцией оператора $K(\beta)$. Заметим, что $K(\beta)$ при любом $\beta \in G$ является интегральным оператором с симметричным слабополярным положительным ядром (см., например [25], с. 327).

Ясно, что, если при некотором $\beta_0 \in G$ функция v является собственной функцией оператора $K(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\gamma = 1$, то v является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению β_0.

При фиксированном положительном $\beta \in G$ оператор $K(\beta)$ имеет счетное множество положительных характеристических значений. Для минимального из них справедливо равенство (см., например, [22], с. 326):

$$\gamma_1(\beta) = \inf_{f \in L_2(\Omega)} \frac{(f, f)}{(K(\beta) f, f)}, \tag{30}$$

где $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Покажем теперь, что существует такое $\beta \in G$, при котором $\gamma_1(\beta) = 1$. В силу непрерывной зависимости $\Phi(\beta; x, y)$ от $\beta \in \Lambda$ функция $\gamma_1 = \gamma_1(\beta)$ непрерывна. Из (30) и предельного соотношения $\Phi(\beta; x, y) \to \infty$ при $\beta \to kn_\infty$ получаем, что $\gamma_1(\beta) \to 0$ при $\beta \to kn_\infty$.

Докажем, что $\gamma_1(kn_+) > 1$. Пусть $v \in L_2(\Omega)$ - собственная функция оператора $K(\beta)$ отвечающая характеристическому значению γ_1 при фиксированном $\beta = kn_+$. Для функции $u = \gamma_1 B(kn_+) \left(p^{-1/2} v\right)$, рассуждая также, как и при доказательстве теорем 3, 4, получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{grad} u|^2 \, dx + \left(k^2 n_+^2 - k^2 n_\infty^2\right) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, dx - \gamma_1 \int\limits_{\Omega} p \, |u|^2 \, dx = 0.$$

Очевидно, что при $\gamma_1 \leq 1$ функция u может быть только нулевой. Поэтому $\gamma_1(kn_+) > 1$.

Обозначим через β_1 единственное решение уравнения $\gamma_1(\beta) = 1$. По теореме Ентча (см., например, [22], с. 329) $\gamma_1(\beta_1)$ есть простое характеристическое значение, и ему отвечает положительная собственная функция v_1. Следовательно, β_1 является простым собственным значением задачи (24), (25), которому отвечает положительная собственная функция $u_1 = B(\beta_1)\left(p^{-1/2}v_1\right)$. Теорема доказана.

Отметим, что в данном случае в силу симметрии рассматриваемых задач по β относительно начала координат результат этой теоремы остается справедливым и для отрицательного $\beta \in G$. Положительное значение $\beta \in G$, и отвечающая ему собственная функция u, существование которых доказано в этой теореме определяют собственную моду, которая в теории волноводов носит название основной.

На основе подхода, разработанного в этом параграфе для изучения спектра скалярной задачи, далее мы получим аналогичные результаты для более сложной векторной задачи.

4 Постановка векторной задачи и локализация спектра

Сформулируем задачу о собственных модах цилиндрического диэлектрического волновода с размытой границей.

Определение 4 *Ненулевой вектор* $[\mathrm{E}, \mathrm{H}] \in \left[C^2(\mathbb{R}^2)\right]^3 \times \left[C^2(\mathbb{R}^2)\right]^3$ *будем называть собственным вектором задачи (8), (22), отвечающим собственному значению* $\beta \in \Lambda$, *если выполнены условия (8), (22). Спектром задачи (8), (22) будем называть множество ее собственных значений.*

Если известен собственный вектор $[\mathrm{E}, \mathrm{H}]$ задачи (8), (22), отвечающий собственному значению $\beta \in \Lambda$, то собственная мода волновода определяется по формуле (2). Следовательно, поиск собственных мод сводится к решению нелинейной векторной спектральной задачи (8), (22).

Теорема 7 *Области B и D главного листа $\Lambda_0^{(1)}$ римановой поверхности Λ не содержат собственных значений задачи (8), (22).*

Доказательство. Пусть $[\mathrm{E}, \mathrm{H}]$ – собственный вектор задачи (8), (22), отвечающий собственному значению $\beta \in B$. Следовательно, имеет место равенство (16). Умножим его скалярно на $\overline{\mathrm{H}}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$. Мы имеем право это делать в силу условия (22) и асимптотики (23). В результате получим:

$$k^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{H}|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{Rot}_\beta \left(\frac{1}{n^2} \mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H}\right), \overline{\mathrm{H}}\right) dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{n_+^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{Rot}_\beta (\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H}), \overline{\mathrm{H}}) dx.$$

Используя равенство (18), формулу (13) и формулу интегрирования по частям, продолжим:

$$k^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{H}|^2 dx \geq \frac{1}{n_+^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (-\Delta \mathrm{H} + \beta^2 \mathrm{H}, \overline{\mathrm{H}}) dx =$$

$$= \frac{1}{n_+^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{grad}\, \mathrm{H}|^2 dx + \frac{\beta^2}{n_+^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{H}|^2 dx.$$

В итоге получим неравенство:

$$(\beta^2 - k^2 n_+^2) \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{H}|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{grad}\, \mathrm{H}|^2 dx \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что значениям $\beta \in B$ отвечает только нулевое решение задачи (8), (22). Действительно, если $\beta \in B$ и $|\beta| > kn_+$, то $\mathrm{H} = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, и $\mathrm{E} = -1/(i\omega\varepsilon_0 n^2)\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H} = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Если же $\beta \in B$ и $|\beta| = kn_+$, то функция H должна принимать постоянное значение в $\mathbb{R}^2$. Но из условия излучения (22) и асимптотики (23) для любого $\beta \in B$ следует, что H обращается в нуль на бесконечности. Значит, $\mathrm{H} = 0$ в $\mathbb{R}^2$ и $\mathrm{E} = 0$ в $\mathbb{R}^2$ при $\beta \in B$.

Пусть теперь $[\mathrm{E}, \mathrm{H}]$ – собственный вектор задачи (8), (22), отвечающий собственному значению $\beta \in D$. Тогда имеет место равенство (15). Умножим его скалярно на $\overline{\mathrm{E}}$ и проинтегрируем по Ω_R, где $R \geq R_0$. В результате, используя формулу (13), формулу интегрирования по частям, и равенство (17), получим:

$$k^2 \int_{\Omega_R} n^2 |\mathrm{E}|^2 dx = \int_{\Omega_R} \left(\mathrm{Rot}_\beta \left(\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{E}\right), \overline{\mathrm{E}}\right) dx =$$

$$= \int_{\Omega_R} \left(-\Delta \mathrm{E} + \beta^2 \mathrm{E} + \mathrm{Grad}_\beta \left(\mathrm{Div}_\beta \mathrm{E}\right), \overline{\mathrm{E}}\right) dx =$$

$$= \int_{\Omega_R} |\mathrm{grad}\, \mathrm{E}|^2 dx - \int_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial |x|}, \overline{\mathrm{E}}\right) dx + \beta^2 \int_{\Omega_R} |\mathrm{E}|^2 dx.$$

Возьмем от левой и правой части полученного равенства мнимую часть:

$$\mathrm{Im} \int_{\Gamma_R} \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial |x|}, \overline{\mathrm{E}}\right) dx = 0, \quad R \geq R_0.$$

Отсюда, используя условие (22) и ортогональность тригонометрических функций, для любого $R \geq R_0$ получим:

$$2\pi\chi R \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Im} \left[H_n^{(2)}(\chi R)\, H_n^{(1)'}(\chi R)\right] |\mathrm{A}_n|^2 = 0.$$

Легко видеть, что мнимая часть выражения, стоящего в этой сумме в квадратных скобках, не зависит от n, а именно:

$$\mathrm{Im} \left[H_n^{(2)}(\chi R)\, H_n^{(1)'}(\chi R)\right] = \frac{2}{\pi\chi R}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно, для любого $x \in \mathrm{I\!R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ все коэффициенты A_n в разложении (22) функции E обращаются в нуль. А это значит, что $\mathrm{E} = 0$ при $x \in \mathrm{I\!R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$. В силу гладкости показателя преломления n, функция E должна обращаться в нуль всюду в $\mathrm{I\!R}^2$ (см. [26], с. 90). Значит, и $\mathrm{H} = 1/(i\omega\mu_0)\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{E} = 0$ в $\mathrm{I\!R}^2$. Итак, значениям $\beta \in D$ отвечает только нулевое решение задачи (8), (22). Теорема доказана.

5 Электромагнитные потенциалы

Для того, чтобы свести задачу (8), (22) к спектральной задаче для интегральной оператор-функции, нам потребуется ввести в рассмотрение электромагнитные потенциалы.

Определение 5 *Вектор-функция* $A(x)$ *и скалярная функция* $\varphi(x)$ *называются соответственно векторным потенциалом и скалярным потенциалом векторного поля* $[E, H]$, *если справедливо представление*

$$E = i\omega\mu_0 A - \mathrm{Grad}_\beta \varphi, \tag{31}$$

$$H = \mathrm{Rot}_\beta A. \tag{32}$$

Лемма 4 *Для любого собственного вектора* $[E, H]$ *задачи (8), (22), отвечающего собственному значению* $\beta \in \Lambda$, *существует векторный потенциал* A *и скалярный потенциал* φ. *Если потенциалы* A *и* φ *связаны друг с другом условием Лоренца*

$$\mathrm{Div}_\beta A = i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \varphi, \tag{33}$$

то они удовлетворяют уравнениям

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] A = -J, \tag{34}$$

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] \varphi = -\rho, \tag{35}$$

где

$$J = -i\omega\varepsilon_0 (n^2 - n_\infty^2) E, \tag{36}$$

$$\rho = -(E, n^{-2} \mathrm{grad} n^2).$$

Доказательство. Пусть вектор $[E, H]$ – собственный вектор задачи (8), (22), отвечающий собственному значению $\beta \in \Lambda$. Поскольку

$$\mathrm{Div}_\beta H = 0,$$

существует такая вектор-функция A, что имеет место представление (32). Подставляя (32) в первое из уравнений Максвелла (8), получим

$$\mathrm{Rot}_\beta (E - i\omega\mu_0 A) = 0.$$

Следовательно, существует такая скалярная функция φ, что справедливо равенство (31). Таким образом любой собственный вектор задачи (8), (22) может быть выражен через функции $A(x)$ и $\varphi(x)$.

Определим теперь каким уравнениям удовлетворяют потенциалы A и φ. Подставим представления (32) и (31) во второе из уравнений Максвелла. В результате получим равенство

$$\mathrm{Rot}_\beta\left(\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{A}\right) - k^2 n_\infty^2 \mathrm{A} = i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{Grad}_\beta \varphi + \mathrm{J}, \qquad (37)$$

где вектор-функция J определена по формуле (36). Из уравнения

$$\mathrm{Div}_\beta\left(n^2 \mathrm{E}\right) = 0,$$

формулы (11) и представления (31) получим цепочку равенств

$$0 = n^2 \mathrm{Div}_\beta + (\mathrm{E}, \mathrm{grad} n^2) = n^2 \mathrm{Div}_\beta\left(i\omega\mu_0 \mathrm{A} - \mathrm{Grad}_\beta \varphi\right) + (\mathrm{E}, \mathrm{grad} n^2).$$

Отсюда и из формулы (9) получим равенство

$$-i\omega\mu_0 \mathrm{Div}_\beta \mathrm{A} + \Delta\varphi - \beta^2\varphi = (\mathrm{E}, n^{-2}\mathrm{grad} n^2). \qquad (38)$$

Как известно [19], в силу неоднозначности определения потенциалов A и φ, можно наложить на них дополнительное условие, которое позволит упростить уравнения (37) и (38). Пусть A и φ удовлетворяют условию Лоренца (33) Тогда из (37) и (38) при помощи формулы (13) получим уравнения (34) и (35). Лемма доказана.

Определение 6 *Вектор-функция* $\Pi(x)$ *называется вектором Герца, или поляризационным потенциалом векторного поля* $[\mathrm{E}, \mathrm{H}]$, *если справедливо представление*

$$\mathrm{E} = \left(k^2 n_\infty^2 + \mathrm{Grad}_\beta \mathrm{Div}_\beta\right) \Pi, \qquad (39)$$

$$\mathrm{H} = -i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{Rot}_\beta \Pi. \qquad (40)$$

Лемма 5 *Для любого собственного вектора* $[\mathrm{E}, \mathrm{H}]$ *задачи (8), (22), отвечающего собственному значению* $\beta \in \Lambda$ *существует поляризационный потенциал* Π. *Потенциал* Π *удовлетворяет уравнению*

$$\left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] \Pi = -\frac{1}{n_\infty^2}\left(n^2 - n_\infty^2\right) \mathrm{E}. \qquad (41)$$

Доказательство. Выразим потенциалы A и φ через один вектор Π. Пусть

$$\varphi = -\mathrm{Div}_\beta \Pi.$$

Тогда из условия Лоренца (33) имеем

$$A = -i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \Pi.$$

Отсюда и из (34), (35) получим два уравнения для Π, а именно уравнение

$$-\mathrm{Div}_\beta \left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] \Pi = \left(E, n^{-2}\mathrm{grad} n^2\right) \tag{42}$$

и уравнение (41).

Проверим, что уравнение (42) является следствием уравнения (41). С этой целью докажем сначала справедливость равенства

$$\mathrm{Div}_\beta \left(\left(n^2 - n_\infty^2\right) E\right) = n_\infty^2 (E, n^{-2}\mathrm{grad} n^2). \tag{43}$$

Действительно, в силу (13)

$$\mathrm{Div}_\beta \left(\left(n^2 - n_\infty^2\right) E\right) = \left(n^2 - n_\infty^2\right) \mathrm{Div}_\beta E + \left(E, \mathrm{grad}\left(n^2 - n_\infty^2\right)\right).$$

Из (17) и (13) следует, что

$$-\mathrm{Div}_\beta E = (E, n^{-2}\mathrm{grad} n^2).$$

Объединяя два последних равенства, получим (43). Пусть справедливо (41). Применяя к обеим частям равенства (41) операцию Div_β и учитывая (43) приходим к (42). Наоборот, из (42) и (43) имеем

$$-\mathrm{Div}_\beta \left[\Delta + \left(k^2 n_\infty^2 - \beta^2\right)\right] \Pi = \frac{1}{n_\infty^2} \mathrm{Div}_\beta \left(\left(n^2 - n_\infty^2\right) E\right),$$

откуда следует, что достаточно потребовать от вектора Π, чтобы выполнялось уравнение (41).

Выразим теперь векторы E и H через Π:

$$E = i\omega\mu_0 A - \mathrm{Grad}_\beta \varphi = i\omega\mu_0 \left(-i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \Pi\right) + \mathrm{Grad}_\beta \mathrm{Div}_\beta \Pi =$$

$$= \left(k^2 n_\infty^2 + \mathrm{Grad}_\beta \mathrm{Div}_\beta\right) \Pi,$$

$$H = \mathrm{Rot}_\beta A = -i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{Rot}_\beta \Pi.$$

Лемма доказана.

6 Нелинейная спектральная задача для интегральной оператор-функции

Для изучения качественных свойств спектра сведем задачу (8), (22) к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. При этом мы будем использовать электромагнитные потенциалы, введенные в предыдущем параграфе.

Лемма 6 *Пусть* $[\mathrm{E},\mathrm{H}]$ *– собственный вектор задачи (8), (22), отвечающий собственному значению* $\beta\in\Lambda$. *Тогда справедлива формула*

$$\mathrm{E}(x) = (\mathcal{B}(\beta)\mathrm{E})(x), \quad x\in\mathbb{R}^2\ , \tag{44}$$

где

$$(\mathcal{B}(\beta)\mathrm{E})(x) = k^2\int\limits_{\Omega}\left(n^2(y)-n_\infty^2\right)\Phi(\beta;x,y)\mathrm{E}(y)dy+$$

$$+\mathrm{Grad}_\beta\int\limits_{\Omega}(\mathrm{E},n^{-2}\mathrm{grad}n^2)(y)\Phi(\beta;x,y)dy, \tag{45}$$

$$\Phi(\beta;x,y) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\chi(\beta)\,|x-y|\right), \quad x\in\mathbb{R}^2,\ y\in\Omega.$$

Доказательство. Вектор Герца П удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (41). Следовательно, рассуждая аналогично доказательству леммы 3, запишем решение этого уравнения в виде

$$\Pi(x) = \frac{1}{n_\infty^2}\int\limits_{\Omega}\left(n^2(y)-n_\infty^2\right)\Phi(\beta;x,y)\mathrm{E}(y)dy, \quad x\in\mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из равенства (39) для $x\in\mathbb{R}^2$ получим

$$\mathrm{E}(x) = \left(k^2n_\infty^2+\mathrm{Grad}_\beta\mathrm{Div}_\beta\right)\frac{1}{n_\infty^2}\int\limits_{\Omega}\left(n^2(y)-n_\infty^2\right)\Phi(\beta;x,y)\mathrm{E}(y)dy.$$

Воспользуемся теперь теоремой о дивергенции:

$$\mathrm{Div}_\beta\int\limits_{\Omega}\left(n^2(y)-n_\infty^2\right)\Phi(\beta;x,y)\mathrm{E}(y)dy =$$

$$=\int\limits_{\Omega}\mathrm{Div}_\beta\left[\left(n^2(y)-n_\infty^2\right)\mathrm{E}(y)\right]\Phi(\beta;x,y)dy, \quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{46}$$

и формулой (43). В итоге получим требуемое равенство. Лемма доказана.

При фиксированном $\beta \in \Lambda$ будем рассматривать оператор $\mathcal{B}(\beta)$, определенный равенством (45), как оператор, действующий в пространстве комплекснозначных функций $[L_2(\Omega)]^3$. Пусть

$$\mathcal{A}(\beta) = I - \mathcal{B}(\beta),$$

где I – единичный оператор в $[L_2(\Omega)]^3$. При всех $\beta \in \Lambda$ ядро оператора $\mathcal{B}(\beta)$ слабополярно, следовательно, оператор $\mathcal{A}(\beta)$ фредгольмов.

Определение 7 *Ненулевой вектор* $\mathrm{F} \in [L_2(\Omega)]^3$ *будем называть собственным вектором оператор-функции* $\mathcal{A}(\beta)$, *отвечающим характеристическому значению* $\beta \in \Lambda$, *если выполнено уравнение*

$$\mathcal{A}(\beta)\mathrm{F} = 0. \tag{47}$$

Характеристическим множеством оператор-функции $\mathcal{A}(\beta)$ *будем называть множество чисел* $\beta \in \Lambda$, *для которых оператор* $\mathcal{A}(\beta)$ *не имеет ограниченного обратного в* $[L_2(\Omega)]^3$.

Сформулируем и докажем теорему о спектральной эквивалентности задачи о собственных модах волновода с размытой границей (8), (22) и спектральной задачи (47) для оператор-функции $\mathcal{A}(\beta)$.

Теорема 8 *Если* $[\mathrm{E},\mathrm{H}] \in [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^3 \times [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^3$ *является собственным вектором задачи (8), (22), отвечающим собственному значению* $\beta_0 \in \Lambda$, *то* $\mathrm{F} = \mathrm{E} \in [L_2(\Omega)]^3$ *есть собственный вектор оператор-функции* $\mathcal{A}(\beta)$, *отвечающий характеристическому значению* β_0. *Если* $\mathrm{F} \in [L_2(\Omega)]^3$ *является собственным вектором оператор-функции* $\mathcal{A}(\beta)$, *отвечающим характеристическому значению* $\beta_0 \in \Lambda$, *и это* β_0 *не является собственным значением задачи (24), (25), то вектор* $[\mathrm{E},\mathrm{H}] \in [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^3 \times [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^3$, *где* $\mathrm{E} = \mathcal{B}(\beta_0)\mathrm{F}$, $\mathrm{H} = (i\omega\mu_0)^{-1}\mathrm{Rot}_{\beta_0}\mathrm{E}$, *есть собственный вектор задачи (8), (22), отвечающий собственному значению* β_0.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 6. Докажем второе утверждение. Пусть $\mathrm{F} \in [L_2(\Omega)]^3$ – собственный вектор оператор-функции $\mathcal{A}(\beta)$, отвечающий характеристическому значению $\beta \in \Lambda$. Ядро интегрального оператора $\mathcal{B}(\beta)$ слабополярно при любом $\beta \in \Lambda$. Следовательно, вектор $\mathrm{E} = \mathcal{B}(\beta)\mathrm{F}$ принадлежит пространству $[C(\Omega)]^3$ (см., например, [25], с. 327). В силу известных свойств потенциала площади (см., например, [25], с. 463) вектор E принадлежит пространству $[C^2(\mathbb{R}^2)]^3$.

По построению вектор E удовлетворяет равенству (44). Применяя к левой и правой частям этого равенства операцию Rot_β, учитывая формулу (9) и теорему о дивергенции (46), получим

$$\mathrm{Div}_\beta \mathrm{E}(x) = k^2 \int\limits_\Omega \mathrm{Div}_\beta \left[\left(n^2(y) - n_\infty^2\right) \mathrm{E}(y)\right] \Phi(\beta; x, y) dy +$$

$$+ \left(\Delta - \beta^2\right) \int\limits_\Omega (\mathrm{E}, n^{-2}\mathrm{grad} n^2)(y) \Phi(\beta; x, y) dy, \quad x \in \mathrm{R}^2$$

Добавляя и вычитая к правой части этого равенства слагаемое

$$k^2 n_\infty^2 \int\limits_\Omega (\mathrm{E}, n^{-2}\mathrm{grad} n^2)(y) \Phi(\beta; x, y) dy,$$

и учитывая формулу Пуассона для потенциала площади:

$$\left[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)\right] \int\limits_\Omega (\mathrm{E}, n^{-2}\mathrm{grad} n^2)(y) \Phi(\beta; x, y) dy =$$
$$= -(E, n^{-2}\mathrm{grad} n^2)(x), \quad x \in \mathrm{R}^2, \tag{48}$$

получим равенство

$$\mathrm{Div}_\beta \mathrm{E}(x) = k^2 \int\limits_\Omega \mathrm{Div}_\beta \left[\left(n^2(y) - n_\infty^2\right) \mathrm{E}(y)\right] \Phi(\beta; x, y) dy - \tag{49}$$

$$-k^2 n_\infty^2 \int\limits_\Omega (\mathrm{E}, n^{-2}\mathrm{grad} n^2)(y) \Phi(\beta; x, y) dy - (E, n^{-2}\mathrm{grad} n^2)(x), \quad x \in \mathrm{R}^2.$$

Далее, в силу линейности операции Div_β и формулы (11) имеем

$$\mathrm{Div}_\beta \left[\left(n^2 - n_\infty^2\right) \mathrm{E}\right] = \mathrm{Div}_\beta \left(n^2 \mathrm{E}\right) - n_\infty^2 \mathrm{Div}_\beta \mathrm{E},$$

$$(\mathrm{E}, n^{-2}\mathrm{grad} n^2) = n^{-2}\mathrm{Div}_\beta \left(n^2 \mathrm{E}\right) - \mathrm{Div}_\beta \mathrm{E}.$$

Используя два предыдущих равенства и равенство (49), нетрудно видеть, что функция $u = n^{-2}\mathrm{Div}_\beta\left(n^2\mathrm{E}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$u = \int\limits_\Omega k^2\left(n^2(y) - n_\infty^2\right)\Phi(\beta; x, y)u(y)dy, \quad x \in \mathrm{R}^2,$$

которое в точности совпадает с уравнением (27). Как было показано в пункте 3.3, если β не является собственным значением задачи (24), (25), то $u = 0$ в $\mathbb{R}^2$. Итак, мы получили, что для вектора E справедлива формула

$$\mathrm{Div}_\beta\left(n^2\mathrm{E}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{50}$$

и уравнение (44) может быть переписано в форме

$$\mathrm{E}(x) = k^2\int\limits_\Omega\left(n^2(y) - n_\infty^2\right)\Phi(\beta; x, y)\mathrm{E}(y)dy-$$
$$-\mathrm{Grad}_\beta\int\limits_\Omega\Phi(\beta; x, y)\mathrm{Div}_\beta\mathrm{E}(y)dy, \quad x \in \mathrm{R}^2. \tag{51}$$

Пусть вектор H определяется следующим равенством (то есть вектора E и H удовлетворяют первому из уравнений (8)):

$$\mathrm{H} = (i\omega\mu_0)^{-1}\mathrm{Rot}_{\beta_0}\mathrm{E}, \quad x \in \mathrm{R}^2.$$

Из уравнения (51) и формулы (12) имеем

$$\mathrm{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0\mathrm{Rot}_\beta\int\limits_\Omega\left(n^2(y) - n_\infty^2\right)\Phi(\beta; x, y)\mathrm{E}(y)dy, \quad x \in \mathrm{R}^2. \tag{52}$$

Отсюда следует, в частности, что если $\mathrm{E} \in [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^3$, то и $\mathrm{H} \in [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^3$. Докажем, что вектора E и H удовлетворяют второму из уравнений (8). Применим к обеим частям уравнения (52) операцию Rot_β и полученное равенство сложим с равенством (51) умноженным на $i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2$:

$$\mathrm{Rot}_\beta\mathrm{H}+i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2\mathrm{E} =$$

$$= -i\omega\varepsilon_0\mathrm{Rot}_\beta\mathrm{Rot}_\beta\int\limits_\Omega\left(n^2(y) - n_\infty^2\right)\Phi(\beta; x, y)\mathrm{E}(y)dy+$$

$$+i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 k^2 \int\limits_\Omega \left(n^2(y) - n_\infty^2\right) \Phi(\beta; x, y) \mathrm{E}(y) dy -$$

$$-i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{Grad}_\beta \int\limits_\Omega \Phi(\beta; x, y) \mathrm{Div}_\beta \mathrm{E}(y) dy, \quad x \in \mathrm{R}^2.$$

Продолжим равенство, используя формулу (13), и теорему о дивергенции (46):

$$\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{E} =$$

$$= i\omega\varepsilon_0 \left[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)\right] \int\limits_\Omega \left(n^2(y) - n_\infty^2\right) \Phi(\beta; x, y) \mathrm{E}(y) dy -$$

$$-i\omega\varepsilon_0 \mathrm{Grad}_\beta \int\limits_\Omega \mathrm{Div}_\beta \left[\left(n^2(y) - n_\infty^2\right) \mathrm{E}(y)\right] \Phi(\beta; x, y) dy -$$

$$-i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{Grad}_\beta \int\limits_\Omega \Phi(\beta; x, y) \mathrm{Div}_\beta \mathrm{E}(y) dy, \quad x \in \mathrm{R}^2.$$

Из этого равенства, уравнения (50) и формулы Пуассона (48) окончательно имеем:

$$\mathrm{Rot}_\beta \mathrm{H} + i\omega\varepsilon_0 n_\infty^2 \mathrm{E} = -i\omega\varepsilon_0 \left(n^2 - n_\infty^2\right) \mathrm{E}, \quad x \in \mathrm{R}^2.$$

Следовательно, вектора E и H удовлетворяют второму из уравнений (8). Из (51), (52) с помощью теоремы сложения Графа (см., например, [24], стр. 201) легко получить, что векторы E и H удовлетворяют условию излучения Свешникова-Рейхардта (22). Теорема доказана.

Следующая теорема описывает качественные свойства спектра задачи (8), (22).

Теорема 9 *Спектр задачи (8), (22) может состоять лишь из изолированных точек. Каждое собственное значение задачи (8), (22) непрерывно зависит от $\omega > 0$ и может появляться и исчезать с изменением ω лишь на границе римановой поверхности Λ, то есть на бесконечности и в точках $\pm k n_\infty$.*

Доказательство. Рассуждая аналогично [8], с. 71, нетрудно показать, что оператор-функция $\mathcal{A}(\beta)$ голоморфна по $\beta \in \Lambda$ и непрерывна как функция двух переменных $\beta \in \Lambda$ и $\omega > 0$. В силу фредгольмовости оператора $\mathcal{A}(\beta)$, теоремы 7 о локализации спектра задачи (8), (22) и теоремы 8 о спектральной эквивалентности задач (8), (22) и (47) оператор $\mathcal{A}(\beta)$ обратим для любого $\omega > 0$ и $\beta \in B \bigcup D$. Таким образом, из теорем 1 и 2 вытекает, что характеристическое множество оператор-функции $\mathcal{A}(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся ее характеристическими значениями; каждое характеристическое значение β непрерывно зависит от $\omega > 0$ и может появляться и исчезать с изменением ω лишь на границе римановой поверхности Λ, то есть на бесконечности и в точках $\pm kn_{\infty}$. Отсюда и из спектральной эквивалентности задач (8), (22) и (47) (теорема 8) следует справедливость теоремы.

Литература

[1] Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. - М.: Радио и связь, 1987.

[2] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1968.

[3] Каценеленбаум Б. З. Симметричное и не симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра // Ж. техн. физ. - 1949. - Т. 19, № 10. - С. 1168 - 1181.

[4] Веселов Г.Н., Раевский С.Б. О спектре комплексных волн круглого диэлектрического волновода // Радиотехника. - 1983. - № 2. - С. 55 - 58.

[5] Jablonski T. F. Complex modes in open lossless dielectric waveguides // J. Opt. Soc. Am. A. - 1994. - V. 11, No 4. - P. 1272 - 1282.

[6] Свешников А.Г. Дифракция на звездном теле // Выч. методы и программирование. М.: Изд-во Московского ун-та, 1969. - Вып. 13. - С. 145 - 151.

[7] Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen fur die Wellengleihung // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. - 1960. - V. 24. - P. 41 - 53.

[8] Ильинский А.С. Шестопалов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд-во МГУ, 1989.

[9] Nosich A. I. Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering // J. Electromag. Waves Applicat. – 1994. – V. 8, No 3. – P. 329 – 353.

[10] Карчевский Е.М. К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, No 9. – С. 1558 – 1563.

[11] Карчевский Е.М. Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов // Диф. урав. – 2000. – Т. 36, No 5. (в печати).

[12] Сухинин С.В. О дискретности собственных частот открытых акустических резонаторов // Неклассические задачи упругости и пластичности. Новосибирск, 1981. – Вып. 49. – С. 157 – 163.

[13] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965.

[14] Steinberg S. Meromorphic families of compact operators // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – V. 31, No 5. – P. 372 – 379.

[15] Colton D., Kress R. Thime harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous medium // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1990. – V. 116A. – P. 279 – 293.

[16] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения (обзор) // Радиотехн. и электроника. – 1979. – Т. 24, No 7. – С. 1245 – 1263.

[17] Даутов Р.З., Ляшко А.Д., Соловьев С.И. Сходимость метода Бубнова-Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Диф. уравн. – 1991. – Т. 27, No 7. – С. 1144 – 1153.

[18] Соловьев С.И., Карчевский Е.М. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Диф. уравн. – 2000. – Т. 36, No 4. – С. 563 – 565.

[19] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. – М.: Высшая школа, 1991.

[20] Каценеленбаум Б.З. О распространении электромагнитных волн вдоль бесконечных диэлектрических цилиндров при низких частотах // Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 58, No 7. – С. 1317 – 1320.

[21] Клеев А.И., Маненков А.Б. Расчет диэлектрических волноводов методом коллокации // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988. – Т. 31, No 1. – С. 93 – 99.

[22] Векуа И.Н. О метагармонических функциях // Труды Тбилисского Матем. ин-та. – 1943. – Т. 12. – С. 105 – 174.

[23] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1987.

[24] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. – М.: Наука, 1974.

[25] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976.

[26] Hormander L. Linear partial differential operators. – Berlin: Springer-Verlag, 1976.