Ильинский А.С. (Москва)

"Парциальные" условия излучения и их применение в электромагнитной волновой теории

"Парциальные" условия излучения

В настоящее время задачи электромагнитной теории имеют большое значение для решения многих научных и технических проблем. Развитие радиоастрономии, радионавигации, создание систем спутниковой связи, антенная техника и целый ряд других направлений требуют всестороннего исследования процессов излучения, отражения и дифракции волн с учетом неоднородной среды.

Теоретическое изучение электромагнитных волновых явлений сводится к исследованию свойств решений уравнений Максвелла в неоднородной среде с учетом граничных условий на телах достаточно произвольной формы. Как правило, исследование волновых явлений является многопараметрической задачей, и успешное изучение явлений связано с методами математического моделирования волновых процессов. Важным классом математических моделей являются модели волновых процессов в установившемся режиме в неограниченных областях трехмерного пространства. К таким моделям относятся модели распространения электромагнитных волн в волноводах и задачи стационарной электромагнитной дифракции на теле, находящемся в локально-неоднородной среде.

Типичная постановка электромагнитной задачи дифракции следующая [1].

В неограниченной области пространства характеристики среды задаются тензорами $\hat{\varepsilon}(M)$ и $\hat{\mu}(M)$ электрической и магнитной проницаемости, причем компоненты тензоров являются переменными функциями координат. В среде может находиться хорошо проводящее тело D, на границе которого ставятся граничные условия. На конечном расстоянии от поверхности тела D характеристики среды постоянны и среда однородна ($\hat{\varepsilon}(M) \equiv$

ε_0, $\hat{\mu}(M) \equiv \mu_0$). В качестве источников поля могут рассматриваться сторонние электрические и магнитные токи, локализованные на конечном расстоянии от тела или на его поверхности. В такой постановке математическая задача сводится к определению в неограниченной области D_e, вне тела D, решения системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\hat{\mu}\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{j}$ - финитная функция, удовлетворяющего граничному условию

$$(2) \qquad [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{\partial D} = Z[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]|_{\partial D}\,,$$

где $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к поверхности тела ∂D, а Z – поверхностный импеданс, заданный в каждой точке поверхности ∂D.

На бесконечности поля должны удовлетворять условиям излучения, обеспечивающим однозначность поставленной задачи и выражающим требование отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Условия излучения в случае конечной границы ∂D формулируются в виде условий Зоммерфельда-Реллиха

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} \left| \left([\mathbf{i}_R, \mathbf{E}] + \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}[\mathbf{i}_R, [\mathbf{i}_R, \mathbf{H}]] \right) \mathbf{i}_R \right|^2 ds = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{i}_R$ – вектор внешней нормали к сфере S_R с центром в некоторой точке $O \in D$.

Условия излучения типа Зоммерфельда, как показали дальнейшие исследования [2], [3], в применении к областям с бесконечными границами, не всегда могут быть сформулированы. Поэтому возникла проблема формулировки принципов излучения, позволяющих выделять единственное решение, не зависящих от вида неограниченной области, в которой ищется решение задачи об установившихся колебаниях. Основополагающими здесь являются исследования А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, которые в работе [4] сформулировали так называемый принцип "предельной" амплитуды, согласно которому решение задачи об установившихся колебаниях однозначно определяется требованием, чтобы это решение было пределом решения задачи Коши для соответствующей нестационарной задачи при $t \to \infty$.

Наряду с принципом "предельной" амплитуды достаточно эффективным оказался принцип "предельного" поглощения предложенный в работе А.Г. Свешникова [2]. Этот принцип выделяет единственное решение установившейся задачи без потерь, как предел задачи об установившихся колебаниях в среде с потерями при стремлении поглощения к нулю. Принцип "предельного" поглощения позволил сформулировать аналитические условия излучения в волноводах, в задачах дифракции на бесконечных периодических поверхностях. Применение предельных принципов рассмотрено в работах [3,5,6].

Для задачи дифракции (1)-(3) в случае тела произвольной формы и произвольной неоднородности среды аналитические методы нахождения решения не представляются возможными, и для получения информации о решении требуется применять численные методы. При этом применяются аппроксимации решения в неограниченной области. Для построения достаточно эффективных численных методов естественно перейти к решению задачи в ограниченной области, причем диаметр области , в которой строится приближенное решение, стремиться сделать наименьшим из всех возможных. Для этого условия излучения из бесконечности требуется перенести на конечную границу Σ_{R_0} , вне которой характеристики среды однородны и восстановление поля может быть проведено чисто аналитическими методами. Предельные условия типа Зоммерфельда-Реллиха и предельные принципы не могут быть непосредственно использованы для применения численных методов в ограниченной области. С их помощью должны быть сформулированы аналитические условия на границе Σ_{R_0}.

Здесь наиболее удобными являются "парциальные" условия излучения, введенные А.Г.Свешниковым в работе [3] и сформулированные для внешней задачи дифракции в работе [7].

Суть "парциальных" условий излучения заключается в следующем. Как известно, система однородных уравнений Максвелла с постоянными коэффициентами ε_0, μ_0 имеет счетную систему решений $\{E_n, H_n\}$, удовлетворяющих условиям излучения на бесконечности. Эта система решений может быть построена методом разделения переменных в сферической системе координат, при этом система может быть занумерована таким образом, что $n > 0$ соответствуют волнам электрического типа, а $n < 0$ – волнам магнитного типа. С помощью теоремы И.Н.Векуа [8] устанавливается полнота системы $\{E_n, H_n\}$ на любой замкнутой поверхности S и представимость вне Σ_{R_0} решения задачи (1)-(3), удовлетворяющего условиям излучения, в виде разложения

$$\begin{matrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{matrix} = \sum_n a_n \begin{matrix} E_n \\ H_n \end{matrix} \tag{4}$$

с общими коэффициентами a_n как для электрического, так и для магнитного поля. Представление (4) справедливо на поверхности Σ_{R_0}. Тем самым мы получаем условие, связывающее касательные составляющие электрического и магнитного поля на поверхности Σ_{R_0}. Оператор, устанавливающий связь между касательными составляющими поля на поверхности Σ_{R_0}, является линейным, но не является локальным, он связывает значение поля $\mathbf{E}$ в точке на поверхности со значениями поля $\mathbf{H}$ во всех точках поверхности. Если поверхность Σ_{R_0} является сферой, то, в силу ортогональности полей сферических волн на сфере, парциальные условия излучения могут быть записаны в виде

$$\beta_n^* \int\limits_{\Sigma_{R_0}} \left[\mathbf{E}, H_n^*\right]_r ds = \beta_n \int\limits_{\Sigma_{R_0}} \left[E_n^*, \mathbf{H}\right]_r ds,$$

где

$$\beta_n = \int\limits_{\Sigma_{R_0}} \left[E_n, H_n^*\right]_r ds.$$

На произвольной поверхности условия излучения имеют более сложный вид и приведены в работах [1], [2].

Принципиально важным является метод получения "парциальных" условий излучения. Он состоит в том, что для решения краевой задачи дифракции в области вне поверхности Σ_{R_0} строится аналитическое представление решения, которое используется для формулировки нелокального условия на конечной поверхности Σ_{R_0}. Это позволяет строить "парциальные" условия излучения для ряда областей, границы которых уходят на бесконечность. Такими областями являются бесконечные волноводы, рупоры, периодические поверхности.

В работе [1] А.Г. Свешников впервые сформулировал и дал обоснование "парциальным" условиям для регулярного волновода. В дальнейшем "парциальные" условия излучения систематически применялись для численного решения задач дифракции с помощью проекционных методов [7], [9]. Важной особенностью работ этого цикла было то, что как точное решение, так и приближенное решение , построенное с помощью проекционного метода точно удовлетворяли "парциальным" условиям излучения. Однако можно воспользоваться общим принципом построения "парциальных" условий излучений для вывода дискретных приближенных "парциальных" условий для сеточных функций. Основой этого принципа являются дискретизация задачи вне области Σ_{R_0}, запись аналитического представления решения дискретной задачи, удовлетворяющего условиям излучения и установление связи между дискретными представлениями полей **E** и **H** на поверхности Σ_{R_0}. Для более детального представления этой общей схемы рассмотрим плоскую задачу дифракции для поля E - поляризации.

Дискретные "парциальные" условия излучения

Задача дифракции в случае E - поляризации на неоднородном цилиндрическом теле S с границей C сводится к решению уравнения Гельмгольца с локальным изменением волнового числа

$$\Delta u + k_i^2(M)\, u = 0, \quad M \in S,$$

$$\Delta u + k_0^2 u = 0, \quad M \notin S + C.$$

На контуре C должны выполняться граничные условия

$$[u]|_C = u_0|_C, \quad [\frac{\partial u}{\partial n}]\bigg|_C = \frac{\partial u_0}{\partial n}\bigg|_C,$$

где u_0 - заданное падающее поле, а на бесконечности - условия излучения.

Перейдем к цилиндрической системе координат (r, φ) с полюсом внутри области S и выделим внешнюю область S_R для $r > R$, где среда однородна и постоянна.

Решение задачи дифракции может быть построено с помощью "неполного" метода Галеркина с использованием координатных функций $\left\{e^{ik\varphi}\right\}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$. Реализация такого метода приведена в работе [10]. Однако, с увеличением размеров области S растет число координатных функций N, необходимых для обеспечения требуемой точности, а с ростом N растет число осциллирующих интегралов от тригонометрических функций и вычислительные затраты на реализацию метода возрастают. Одним из вариантов решения проблемы экономии вычислений является выбор полной системы функций на окружности S_R с финитным носителем. Но произвольный выбор координатных функций переносит вычислительные трудности с подсчета коэффициентов системы обыкновенных дифференциальных уравнений к подсчету матрицы краевых условий при аппроксимации условий излучения на контуре S_R. Тем не менее, возможен выбор такого финитного базиса, для которого можно поставить дискретные "парциальные" условия излучения.

Будем строить приближенное решение как при $r < R$, так и при $r > R$, в виде конечной суммы

$$u^N(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{N} R_k(r)\ \psi_k(\varphi) \tag{5}$$

по базисной системе периодических B-сплайнов $\left\{\psi_i(\varphi)\right\}_{i=1}^{N}$ степени l дефекта 1 на сетке с N узлами разбиения

$$\omega_h = \left\{ih, \quad i = 1, \ldots, N, \quad h = \frac{2\pi}{N}\right\}.$$

Коэффициенты $R_k(r)$ определяются из системы соотношений, проектирующих уравнение Гельмгольца и краевые условия на эту же систему B-сплайнов.

Для $r > R$ эта система имеет вид

$$\int_0^{2\pi} (\Delta u^n + k_0^2 u^n)\ \psi_k(\varphi)\ d\varphi = 0, \quad r > R, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Систему проекционных соотношений (6) будем называть продолженной. Потребуем, чтобы сумма u^N удовлетворяла условиям излучения при $r \to \infty$.

Подставляя соотношения (5) в систему проекционных соотношений (6) и учитывая вид оператора Лапласа в цилиндрической системе координат, придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений в области $r > R$

$$A\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathbf{U}}{dr}\right) + B\frac{1}{r^2}\mathbf{U} + k_0^2 A\mathbf{U} = 0, \tag{7}$$

где

$$A = \left(\alpha_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}, \quad \alpha_{i,j} = \int_0^{2\pi} \psi_i(\varphi)\psi_j(\varphi)\,d\varphi,$$

$$B = \left(\beta_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}, \quad \beta_{i,j} = \int_0^{2\pi} \psi_i''(\varphi)\psi_j(\varphi)\,d\varphi,$$

Вектор

$$\mathbf{U}(r) = \left(R_1(r), \ldots, R_N(r)\right)^T.$$

В силу определения периодических B-сплайнов, матрицы A и B являются циркулярными с первыми столбцами

$$\mathbf{a} = \left(a_0, a_1, \ldots, a_l, 0, \ldots, 0, a_l, a_{l-1}, a_1\right)^T,$$

$$\mathbf{b} = \left(b_0, b_1, \ldots, b_l, 0, \ldots, 0, b_l, b_{l-1}, b_1\right)^T,$$

$$a_k = \int_0^{2\pi} \psi_i(\varphi)\psi_m(\varphi)\,d\varphi, \quad \text{где} \quad m = \begin{cases} i+k, & i+k \le N \\ i+k-N, & i+k > N \end{cases},$$

l – степень сплайна.

Собственные значения матриц A и B выписываются в явном виде

$$\lambda_j^A = a_0 + 2\sum_{k=1}^{l} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{N}j\right), \quad \lambda_j^B = b_0 + 2\sum_{k=1}^{l} b_k \cos\left(\frac{2\pi k}{N}j\right),$$

$$j = 0, \ldots, N-1.$$

Для матрицы A имеет место разложение

$$A = N^{-1/2} F_N^* \,\mathrm{diag}\{F_n \mathbf{a}\}\, N^{-1/2} F_N,$$

$$F_N = \left\{\varepsilon_N^{p,q}\right\}_{p,q=0}^{(N-1)}, \quad \varepsilon_N = e^{i\dfrac{2\pi}{N}},$$

а матрица $P_N = N^{-1/2}F_N^*$ - унитарна.

Система уравнений (7) при $r > R$ допускает аналитическое решение, удовлетворяющее условиям излучения. Это решение

$$\mathbf{U} = P_N\mathbf{X}(r), \quad \mathbf{X}(r) = H(r)\mathbf{c}, \tag{8}$$

$$H(r) = \mathrm{diag}\left\{H^1_{\nu_1}(k_0r), \ldots, H^1_{\nu_N}(k_0r)\right\}^T,$$

$\mathbf{c}$ - произвольный постоянный вектор, а индекс ν_j определяется соотношением

$$\nu_j = \sqrt{-\frac{\lambda^B_{j-1}}{\lambda^A_{j-1}}}.$$

Для собственных значений установлены следующие неравенства

$$0 < \alpha_1 h \le \lambda_j^A \le \alpha_2 h, \quad 0 < -\lambda_j^B \le \beta_2\frac{1}{h},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ не зависят от N.

Представление (8) и условия сопряжения при $r = R$ позволяют получить для вектора $\mathbf{U}(r)$, определенного при $r \le R$, следующее дискретное "парциальное" условие излучения

$$\left.\frac{d\mathbf{U}}{dr} - P_n\frac{dH}{dr}H^{-1}P_N^*\mathbf{U}\right|_{r=R} = \left.\frac{d\mathbf{G}}{dr} - P_N\frac{dH}{dr}H^{-1}P_N^*\mathbf{G}\right|_{r=R}.$$

Вектор $\mathbf{G}$ определяется как разложение падающего поля u_0 по системе финитных базисных функций на сфере радиуса r,

$$\mathbf{G}(r) = \left(G_1(r), \ldots, G_N(r)\right),$$

$$G_i(r) = \int_0^{2\pi} u_0(r,\varphi)\psi_i(\varphi)d\varphi.$$

Таким образом, задача дифракции сведена к решению краевой задачи для конечной системы линейных дифференциальных уравнений на конечном отрезке. Матрица системы линейных алгебраических уравнений имеет разреженную структуру, а матричные элементы вычисляются как интегралы от финитных функций, что позволяет рассматривать матрицы большого порядка. Результаты реализации изложенной схемы приведены в работах [11, 12].

Для решения векторных задач дифракции финитный базис становится особенно эффективным. В работах [13, 14] рассмотрены финитные базисные функции для векторной задачи дифракции.

Литература

[1] Свешников А.Г. Прямые и обратные задачи электродинамики // В кн. "Проблемы математической физики и вычислительной математики". – М.: Наука, 1977. - С.287-298.

[2] Свешников А.Г. О принципе излучения // Докл. АН СССР. - 1950. – Т.75, №5. – С.645-647.

[3] Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. – 1951. – Т.80, №3/ – С.345-347.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. О принципе излучения // ЖЭТФ. – 1948. – Т.18, №2. – С.121-130.

[5] Свешников А.Г., Ильинский А.С. Прямой метод для задач дифракции на локальном неоднородном теле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т.11, №4. – С.960-968.

[6] Ильинский А.С. Метод исследования задач дифракции волн на периодической структуре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1974. – Т.14, №4. – С.1063-1067.

[7] Свешников А.Г. Дифракция на ограниченном теле // Докл. АН СССР. – 1969. – Т.184, №1. – С.71-74.

[8] Векуа И.Н. О полноте системы метагармонических функций // Докл. АН СССР. – 1953. – Т.90, №5. – С.715-718.

[9] Ильинский А.С., Свешников А.Г., Кравцов В.В. Математические модели электродинамики. - М.: Высш. шк., 1991.

[10] Ильинский А.С., Павлов А.Л., Свешников А.Г. Дифракция плоской волны на идеально проводящем цилиндре в неоднородной среде // Радиотехн. и электроника. - 1972. - Т.17, №7. - С.1387-1391.

[11] Ильинский А.С., Некрасов Л.М. Численный метод решения задачи дифракции на неоднородном диэлектрическом цилиндре и его обоснование // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1995. - Т.35, №1. - С.37-51.

[12] Ильинский А.С., Некрасов Л.М. Результаты решения задачи дифракции плоской волны на неоднородном диэлектрическом цилиндре // Радиотехн. и электроника. - 1995. - Т.40, №5. - С.695-703.

[13] Апельцин В.Ф., Ильинский А.С., Сабитов Б.Р. Обоснование модифицированного неполного проекционного метода для задач рассеяния от гидрометеоров // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1986, Т.26, №10. - С.1535-1551.

[14] Апельцин В.Ф., Ильинский А.С., Сабитов Б.Р. Об аппроксимации векторных полей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1986. - Т.26, №9. - С.1412-1415.