ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА В ПРЕДЕЛЬНО ВЯЗКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЖИДКОСТИ

А.Г.Терентьев

Чувашский государственный университет

tag@chuvsu.ru

Рассматривается движение цилиндрического тела в ограниченной вязкой жидкости в приближении Стокса. Задача решается методом конформного отображения области течения на кольцо с последующим использованием разложений искомых функций в ряд Лорана. Для частных случаев движения кругового цилиндра в жидкости, ограниченной концентрическим неподвижным цилиндром, получены точные аналитические решения. В случае эксцентрических окружностей для определения коэффициентов предложен численный алгоритм, основанный на методе коллокации. Путем предельного перехода к бесконечно большому радиусу внешнего цилиндра получено движение цилиндра перпендикулярно к плоскости.

Введение. Из общего уравнения Навье-Стокса следует, что в окрестности обтекаемого твердого тела при малых числах Рейнольдса отношение конвективных членов к членам, характеризующим сопротивление трения, может быть малым и с математической точки зрения конвективными членами можно пренебречь. Такое упрощение было предложено Стоксом [1], который рассмотрел обтекание сферы и цилиндра. Им был обнаружен любопытный факт, что для цилиндра, в отличие от сферы, получить решение, удовлетворяющее всем граничным условиям, не удается. Этот факт известен в литературе как "парадокс Стокса" [2, 3]. Чтобы преодолеть парадокс Стокса Озееном [4] была предложена линеаризация конвективных членов. В рамках данного приближения в работах [5, 6] получены разложения по малым числам Рейнольдса коэффициента сопротивления сферы и цилиндра. Эти же результаты могут быть получены методом сращивания асимптотических разложений [7].

Следует заметить, что парадокс Стокса порождается прежде всего наличием в области течения бесконечно удаленной точкой. Анализ асимптотического поведения нелинейных уравнений Навье-Стокса [7] показывает, что отношение конвективных членов к вязким имеет порядок $O(r \ln r \, Re)$ при $r \to \infty$, следовательно, на достаточно больших расстояниях r при любом малом числе Рейнольдса Re это отношение может быть сколь угодно большим, и приближенение Стокса не пригодно.

Ниже рассматривается движение цилиндрического тела в вязкой жидкости, ограниченной неподвижной цилиндрической поверхностью. В этом случае можно получить решение в рамках приближения Стокса, удовлетворяющее граничным условиям прилипания как на движущемся теле, так и на внешней неподвижной поверхности.

Предлагаемое решение применимо, прежде всего, для гидродинамических задач, связанных с взаимодействием двух близких поверхностей. Такие задачи возникают, например, при электрошлаковой горячей штамповке технических изделий, в гидравлических подшипниках, муфтах и амортизаторах.

1. Постановка задачи. Пусть в плоскости $z = x + iy$ подвижный контур $_1$ находится внутри неподвижного контура C_2. Скорость движения каждой точки контура $_1$ считается известной и равной $W(z) = U + iV$, $z \in C_1$. Жидкость предполагается невесомой и несжимаемой. Условие несжимаемости в двумерных задачах допускает существование функции тока $\psi(x, y)$, через которую выражаются компоненты скорости

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

и завихренность потока

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = - \Delta \psi. \tag{1.2}$$

В приближении Стокса уравнения движения жидкости имеют следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x},$$

где μ – динамический коэффициент вязкости. Отсюда следует, что комплексная функция $f(z) = \psi - ip/\mu$ является аналитической, а функция тока удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\triangle^2\psi = 0. \tag{1.3}$$

Для частного случая движения кругового цилиндра в безграничной жидкости решение может быть найдено непосредственно из уравнения (1.3), записанного в полярных координатах [8]. Полярные координаты с последующим применением метода разделения переменных можно использовать также для произвольного контура. Однако здесь мы применим более эффективный метод, основанный на представлении бигармонической функции через две аналитические фукнкции комплексного переменного [9]

$$\psi = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]. \tag{1.4}$$

Отсюда можно найти комплексную скорость

$$u + iv = -i[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}], \tag{1.5}$$

завихренность потока и давление

$$\omega = -4\mathrm{Re}\varphi'(z), \qquad p = -4\mu\mathrm{Im}\varphi'(z). \tag{1.6}$$

В соответствии с условием прилипания, на контурах C_1 и C_2 скорость жидкости совпадает со скоростью точки контуров, т. е.

$$\begin{gathered} u(x,y) = U,\ v(x,y) = V,\ (x,y) \in C_1, \\ u(x,y) = 0,\ v(x,y) = 0,\ (x,y) \in C_2. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Таким образом, гидродинамическая задача в приближении Стокса сводится к определении аналитических функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ или их производных $\varphi'(z)$ и $\chi'(z)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.7). Из (1.6) следует, что производная $\varphi'(z)$ должна быть однозначной функцией. Однако функция $\varphi(z)$ может быть многозначной и, следовательно, сопряженная функция $\overline{\chi'(z)}$ также будет многозначной, так что их сумма должна быть однозначной. Условие однозначности можно записать в виде

$$\oint_{C_1} \varphi'(z)dz + \overline{\oint_{C_1} \chi''(z)dz} = 0. \tag{1.8}$$

2. Аналитическое решение задачи. Рассмотрим сначала частные случаи контуров C_1 и C_2 в виде двух концентрических окружностей радиусов R_1 и R_2. Пусть внутренняя окружность движется параллельно оси x поступательно со скоростью U; вертикальная составляющая скорости $V = 0$. В рассматриваемый момент их центры совпадают.

Решение задачи можно получить непосредственно в плоскости z путем разложения в ряды Лорана искомых функций $\varphi'(z)$ и $\chi''(z)$ в кольце $R_1 \leq |z| \leq R_2$. Однако здесь мы для общности изложения вместо плоскости z рассмотрим плоскость $\zeta = z/R_1$, в которой областью течения является кольцо $1 \leq |\zeta| \leq R$, где $R = R_2/R_1$. Функция $z(\zeta) = R_1\zeta$ и ее производная $z'(\zeta) = R_1$. В кольце $1 \leq |\zeta| \leq R$ функция $\varphi(\zeta) = \varphi(z(\zeta))$ в силу симметрии течения может быть представлена в виде ряда Лорана и логарифмического члена с мнимыми коэффициентами

$$\varphi(\zeta) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n + ia \ln \zeta. \qquad (2.1)$$

Ее производная

$$\varphi'(\zeta) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n \zeta^{n-1} + ia/\zeta. \qquad (2.2)$$

Функция $\chi'(\zeta)$, в соответствии с условием (1.8), должна иметь аналогичное (2.1) представление:

$$\chi'(\zeta) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n - ia \ln \zeta. \qquad (2.3)$$

Следовательно, комплексная скорость (1.5)

$$u + iv = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \zeta^n - b_n \bar{\zeta}^n) - D\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n \bar{\zeta}^{n-1} + a/\bar{\zeta}\right) + 2a \ln|\zeta|, \quad (2.4)$$

где множитель

$$D = z(\zeta)/\overline{z'(\zeta)}. \qquad (2.5)$$

Для данного случая $D = \zeta$.

На внутренней окружности при $\zeta = e^{i\theta}$ и внешней окружности при $\zeta = Re^{i\theta}$ должны выполняться граничные условия (1.7):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n - (2-n)a_{2-n} - b_{-n}]e^{i\theta n} - ae^{2\theta i} = U, \qquad (2.6)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a_nR^n-(2-n)a_{2-n}R^{2-n}-b_{-n}R^{-n}]e^{i\theta n}-ae^{2\theta i}+2a\ln R=0. \quad (2.7)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a, a_n, b_n. Рассмотрим сначала уравнения для $n>2$ и $n<0$, которые имеют одинаковый вид:

$$a_n-(2-n)a_{2-n}-b_{-n}=0, \quad a_nR^n-(2-n)R^{2-n}a_{2-n}-R^{-n}b_{-n}=0.$$

Заменив в этих уравнениях индексы n через $2-n$, получим еще два линейных уравнений вида

$$a_{2-n}-na_n-b_{n-2}=0, \quad a_{2-n}R^{2-n}-nR^na_n-R^{n-2}b_{n-2}=0,$$

которые совместно с предыдущими двумя равенствами составляют систему четырех линейных однородных уравнений с тривиальными решениями

$$a_n=0, \quad a_{2-n}=0, \quad b_{-n}=0, \quad b_{n-2}=0, \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Из оставшихся уравнений

при $n=0$: $a_0-b_0-2a_2=U, \qquad a_0-b_0-2R^2a_2+2a\ln R=0;$
при $n=1$: $a_1-a_1-b_{-1}=0, \qquad (a_1-a_1)R-R^{-1}b_{-1}=0;$
при $n=2$: $a_2-b_{-2}-a=0, \qquad R^2a_2-R^{-2}b_{-2}-a=0,$

которые получаются из (2.6) и (2.7), определяются следующие коэффициенты:

$$b_{-1}=0, \quad a_2=\frac{U}{2[R^2-1-(R^2+1)\ln R]}, \quad b_{-2}=-R^2a_2,$$
$$a=(R^2+1)a_2, \quad a_0-b_0=2[R^2-(R^2+1)\ln R]a_2. \quad (2.8)$$

Коэффициент a_1 взаимно уничтожается и не содержится в функции для скорости. Он входит лишь в формулу для давления (1.6) как постоянное слагаемое и, следовательно, определяется заданным гидростатическим давлением. Без ущерба для общности задачи его можно опустить. Свободные члены a_0 и b_0 входят в формулу для скорости

(2.4) в виде разности, поэтому один из них можно положить равным нулю, например, $a_0 = 0$, тогда b_0 определится из (2.8).

3. Численный метод коллокации. Метод коллокации предусматривает выполнение граничных условий лишь в отдельных точках. К сожалению строгого математического обоснования метод до сих пор не имеет, однако он прост для численной реализации, применим для сложных граничных условий, дает достаточно высокую точность и поэтому широко используется в гидродинамике со свободными границами [10 13].

Обозначим через ζ_k коллокационные точки на границах C_1 и C_2, в которых граничные условия (1.7) выполняются точно. Сохраним в рядах (2.1) и (2.3) по $2N + 1$ членов и пронумеруем их коэффициенты от 1 до $4N + 2$, тогда

$$\varphi(\zeta) = i\left(\sum_{n=1}^{2N+1}{}' C_k\zeta^{n-N-1} + C_{N+1}\ln\zeta\right),$$

$$\chi'(\zeta) = i\left(\sum_{n=2N+2}^{4N+2} C_k\zeta^{n-3N-2} - C_{N+1}\ln\zeta\right), \tag{3.1}$$

$$\varphi'(\zeta) = i\sum_{n=1}^{2N+1} C_k(n - N - 1\zeta^{n-N-2},$$

Σ' означает, что свободный член C_{N+1} в сумме отсутствует; здесь через C_{N+1} обозначен коэффициент при логарифмическом члене.

Комплексная скорость (1.5) в точках коллокации может быть представлена в виде суммы

$$u_k + iv_k = \sum_{n=1}^{4N+1} B_{kn}C_n, \tag{3.2}$$

где введены следующие обозначения:

$$B_{kn} = \begin{cases} 2\ln|\zeta_k| - D_k/\overline{\zeta_k},\ n = N+1, \\ \zeta_k^{n-N-1} - D_k(n-N-1)\overline{\zeta}_k{}^{n-N-2}, & n \le 2N+1, \\ & n \ne N+1, \\ -\overline{\zeta}_k{}^{n-3N-2},\ n \ge 2N+2. \end{cases}$$

Здесь множитель $D_k = \zeta_k$. Ниже множитель D_k используется в более общей задаче и вычисляется по формуле (2.5). Коэффициенты B_{kn} являются комплексными числами, за исключением точки ζ_k, находящейся на действительной оси, где они принимают действительные значения. Кроме того, на действительной оси вертикальная компонента скорости $v = 0$. Для того, чтобы представить равенство (3.2) в матричной форме, необходимо приравнять действительные и мнимые части. Пусть число коллокационных точек равно $2N + 2$ (по $N + 1$ точек на каждой окружности), причем ζ_1 и ζ_{N+2} одновременно являются точками действительной оси. Такими точками можно выбрать

$$\zeta_k = \begin{cases} e^{i(k-1)/(N+1)}, \ k = \overline{(1, N+1)} & \text{на } C_1, \\ \\ Re^{i(k-N-2)/(N+1)}, \ k = \overline{(N+2, 2N+2)} & \text{на } C_2. \end{cases}$$

Введем вектор $\mathbf{V}$ размерности $4N + 2$ и квадратную матрицу $\mathbf{M}$ размерности $(4N+2) \times (4N+2)$. Первые $N+1$ компонент V_k совпадают с действительными составляющими $u_k = U$ границы C_1, следующие $N+1$ компонент – с составляющими $u_k = 0$ границы C_2, следующие $2N$ компонент – с мнимыми составляющими скорости $v_k = 0$ на границах C_1 и C_2.

Аналогично определяются элементы матрицы M_{kn}; первые $2N + 2$ строк совпадают с действительными частями элементов матрицы $\mathrm{Re}(B_{kn})$, остальные $2N$ строк – с мнимыми частями $\mathrm{Im}(M_{kn})$. Поскольку коэффициент $C_{N+2} \equiv 0$, то можно заменить $N + 2$ -й столбец в матрице $\mathbf{M}$ любой константой, например, положить $M_{k,N+2} = 1$. В результате граничное условие (1.7) и решение запишутся в матричной форме

$$\mathbf{V} = \mathbf{MC}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}. \tag{3.3}$$

Вычисления показывают, что численное решение (3.3) практически тождественно совпадает с аналитическими (2.8).

4. Движение эксцентрического цилиндра. Пусть центр малого цилиндра смещен по ходу движения относительно центра большого цилиндра на величину d. Будем считать, что начало координат совпадает с центром малого цилиндра, тогда центр большого цилиндра будет находиться в точке $-d$. Все формулы (1.4) – (1.6) и граничные условия (1.7) справедливы и для данного случая.

Для решения задачи отобразим с помощью дробно-линейного преобразования [9] область между двумя окружностями C_1 и C_2 на кольцо с внутренним единичным радиусом в вспомогательной плоскости ζ. Поскольку начало координат $\zeta = 0$ и бесконечно удаленная точка $z = \infty$ являются симметричными относительно концентрических окружностей, то образы этих точек $z = c_1$ и $z = c_2$ должны быть также симметричными относительно окружностей C_1 и C_2 одновременно и удовлетворять условиям

$$c_1 c_2 = R_1^2, \qquad (c_1 + d)(c_2 + d) = R_2^2.$$

Отсюда определяются параметры c_1 и c_2 как решения квадратного уравнения $t^2 - 2bt + R_1^2 = 0$:

$$c_1 = b - \sqrt{b^2 - R_1^2}, \quad c_1 = b + \sqrt{b^2 - R_1^2}, \qquad b = \frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2}{2d}. \tag{4.1}$$

Искомая отображающая функция имеет вид

$$\zeta(z) = \frac{R_1 - c_2}{R_1 - c_1} \frac{z - c_1}{z - c_2}. \tag{4.2}$$

Внутренний радиус кольца равен единице ($\zeta(1) = 1$), внешний радиус $R = \zeta(R_2 - d)$.

Из (4.2) можно выразить переменную z через переменную ζ:

$$z(\zeta) = \frac{c_2(R_1 - c_1)\zeta - c_1(R_1 - c_2)}{(R_1 - c_1)u - (R_1 - c_2)}.$$

Ее производная

$$z'(\zeta) = \frac{(c_1 - c_2)(R_1 - c_1)(R_1 - c_2)}{[(R_1 - c_1)u - (R_1 - c_2)]^2}. \tag{4.3}$$

В кольце параметрической плоскости ζ можно применить тот же алгоритм, что и для концентрических окружностей. Искомые функции (3.1) будут представлены в виде рядов Лорана по степеням ζ, и все расчетные формулы применимы, за исключением множителя D_k, который равен

$$D_k = \frac{z(\zeta_k)}{z'(\zeta_k)}.$$

Кроме того, $N+2$-й столбец матрицы в этом случае будет отличен от нуля, поэтому его необходимо сохранить.

5. Результирующая сила. Напряжение, действующее на единицу длины контура, определяется по формуле Навье-Стокса через компоненты тензора скоростей деформации, которые равны соответственно

$$\begin{gathered} e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{Im}F(z),\ e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Im}F(z), \\ e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\mathrm{Re}F(z), \end{gathered} \tag{5.1}$$

где

$$F(z) = \overline{z}\varphi''(z) + \chi''(z). \tag{5.2}$$

Компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu e_{xx},\ \sigma_{yy} = -p + 2\mu e_{yy},\ \sigma_{xy} = 2\mu e_{xy}.$$

Пусть направление обхода контура произвольного профиля выбрано против хода часовой стрелки, т. е. при обходе контура жидкость остается справа. Если нормаль направлена в сторону жидкости, то ее комплексное представление равно $n = -idz/|dz|$. Следовательно, напряжение на элементарную длину контура

$$d\sigma^{(n)}dz = ip\,dz + 2\mu[e_{xx}n_x + e_{xy}n_y + i(e_{xy}n_x + e_{yy}n_y)ds =$$

$$= ip\,dz - 2\mu(e_{xy} - ie_{xx})(dx - idy).$$

Принимая во внимание (5.1) и (5.2), находим

$$d\sigma^{(n)} = -4\mu\, i\,\mathrm{Im}\varphi'(z)dz + 2\mu(\overline{z\varphi''(z)} + \overline{\chi''(z)})\overline{dz}.$$

Интегрируя далее вдоль замкнутого контура, получаем окончательную формулу для результирующей силы:

$$X + iY = -4\mu\, i \oint\limits_{C_1} \mathrm{Im}\varphi'(z)dz + 2\mu\overline{\oint\limits_{C_1} \overline{z}\varphi''(z)dz} + 2\mu\overline{\oint\limits_{C_1} \chi''(z)dz}. \tag{5.3}$$

С помощью выражения (4.3) нетрудно найти момент результирующей силы относительно начала координат

$$M = -4\mu \mathrm{Re} \oint_{C_1} \mathrm{Im} \varphi'(z) \bar{z} dz - \\ 2\mu \mathrm{Im} \left(\overline{\oint_{C_1} z\bar{z}\varphi''(z)dz} + 2\mu \overline{\oint_{C_1} \chi''(z) z dz} \right). \tag{5.4}$$

Полученные формулы (5.3) и (5.5) справедливы для произвольного контура. В случае поступательного движения окружностей момент $M = 0$. Для концентрических окружностей все интегралы в (5.3) вычисляются аналитически. Коэффициент сопротивления

$$C_x = X/\rho U^2 R_1 = \frac{8\pi[(R_2/R_1)^2 + 1]}{Re[(R_2/R_1)^2 - 1 - ((R_2/R_1)^2 + 1)\ln(R_2/R_1)]}, \tag{5.5}$$

где $Re = 2R_1 U\rho/\mu$ — число Рейнольдса.

В случае эксцентрических окружностей результирующая сила вычисляется численно по формуле (5.3).

6. Применение метода граничных элементов. Бигармоническое уравнение (1.3) относительно функции тока можно представить в виде системы уравнения Лапласа относительно функции завихренности $\omega(x, y)$ и уравнения Пуассона относительно функции тока $\psi(x, y)$:

$$\Delta\omega = 0, \qquad \Delta\phi = -\omega.$$

Их предельные значения на границе области удовлетворяют следующим интегральным уравнениям [13]:

$$L\omega = 0,$$

$$L\varphi = \int_C \omega(\tau) H_n(\tau, z) ds_\tau - \int_C \omega_n(\tau) H(\tau, z) ds_\tau,$$

где L — интегральный оператор Грина:

$$L\omega = \frac{\omega(z)}{2} + \int_C \omega(\tau) G_n(\tau, z) ds_\tau - \int_C \omega_n(\tau) G(\tau, z) ds_\tau,$$

$$G = 1/2\pi r, \quad H = r^2(1 - \ln r)/8\pi, \quad r = |z - \tau|,$$

G_n и H_n — их нормальные производные.

Применяя способ дискретизации метода граничных элементов [14], можем представить интегральные уравнения в матричной форме

$$\mathbf{A}\Omega - \mathbf{B}\mathbf{P} = 0, \qquad \mathbf{A}\Psi - \mathbf{B}\mathbf{Q} = \mathbf{C}\Omega - \mathbf{D}\mathbf{P}. \tag{6.1}$$

Аналитические выражения элементов матриц **A** и **B** для постоянных элементов приведены в [15]. Аналогичные выражения можно получить для элементов матриц **C** и **Д**. Заметим, что элементы этих матриц выражаются только через узловые и контрольные точки границы. Узловыми точками считаются концевые точки элементов, а контрольными — средние точки элементов. Элементами векторов Ω, **P**, Ψ и **Q** являются значения функций ω, p, ψ и ψ_n, причем Ψ_k и Q_k определяются из граничных условий (1.7), а элементы Ω_k и P_k – из системы линейных уравнений (6.1).

Из (6.1) сначала можно выразить вектор **P**:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\Omega, \quad \mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{C}\Omega + \mathbf{A}\Psi - \mathbf{B}\mathbf{Q}), \tag{6.2}$$

затем, исключив его, найти вектор

$$\Omega = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{K}, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\Psi - \mathbf{B}\mathbf{Q}).$$

Из первого уравнения (6.2) вычисляется вектор **P**.

Для вычисления сил трения необходимо вычислить вторые частные производные $\psi_{xx}, \psi_{yy}, \psi_{xy}$ на поверхности цилиндра. Из условия (1.7) следует, что на цилиндре производные по дуговой абсциссе $\partial\psi_x/\partial s = 0$ и $\partial\psi_y/\partial s = 0$. Эти два соотношения совместно с формулой (1.2) для функции завихренности составляют линейную систему относительно $\psi_{xx}, \psi_{yy}, \psi_{xy}$:

$$\begin{cases} \psi_{xx}x_s + \psi_{xy}y_s &= 0, \\ \psi_{yx}x_s + \psi_{yy}y_s &= 0, \\ \psi_{xx} + \psi_{yy} &= -\omega. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{xx} = -\omega n_x^2, \quad \psi_{yy} = -\omega n_y^2, \quad \psi_{xy} = -\omega n_x n_y.$$

7. Числовые расчеты Из (5.5) следует, что с увеличением внешнего радиуса сопротивление уменьшается и в пределе при $R_2/R_1 \to \infty$

коэффициент C_x стремится к нулю, т. е. тело при движении в безграничной вязкой жидкости в приближении Стокса не испытывает сопротивления. Этот факт можно рассматривать как парадокс стационарного процесса в стоксовой жидкости. Из формул (2.8) следует, что при $R_2/R_1 \to \infty$ все коэффициенты обращаются в нуль, за исключением разности $a_0 - b_0 \to U$. Следовательно, указанный парадокс имеет следующее объяснение: при установившемся движении за счет конвективных членов вся жидкость вовлекается в движение и представляется вместе с телом как единое твердое тело, движущееся поступательно с постоянной скоростью U. Одновременно следует парадокс Стокса: при стационарном движении в неограниченной стоксовой жидкости невозможно удовлетворить условию неподвижности жидкости на бесконечности. Как было отмечено во введении, приближение Стокса применимо лишь для ограниченных областей.

Из (5.5) видно, что с уменьшением внешнего радиуса R сопротивление увеличивается и в пределе при $R \to 1$ ($R_2 \to R_1$) коэффициент $C_x \to \infty$. Числовые расчеты показывают, что сопротивление увеличивается также с приближением внутреннего цилиндра к поверхности внешнего цилиндра, т. е. при $d \to R_2 - R_1$.

Для эксцентрических окружностей имеет смысл вместо расстояния между центрами d ввести безразмерный параметр δ, характеризующий зазор между поверхностями цилиндров $\delta = (R_2 - R_1 - d)/(R_2 - R_1)$; при $\delta = 1$ центры совпадают, при $\delta = 0$ поверхности цилиндров соприкасаются. Некоторые результаты, рассчитанные по аналитическим формулам, представлены в таблице 1.

Из таблицы видно, что с уменьшением радиуса внешней окружности и зазора, а также с уменьшением числа Рейнольдса коэффициент сопротивление цилиндра резко возрастает и может быть сколь угодно большим. Следовательно, при конечных внешних силах и в конечном промежутке времени внутренний цилиндр не может коснуться поверхности внешнего цилиндра и полностью вытеснить вязкую жидкость вдоль прямой касания.

Табл. 1. Зависимость произведения $C_x Re$
от радиуса $R = R_2/R_1$ и зазора δ

R	δ=0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
1.1	$1.05 \cdot 10^6$	$4.03 \cdot 10^5$	$1.70 \cdot 10^5$	$1.13 \cdot 10^5$	$9.29 \cdot 10^4$	$8.74 \cdot 10^4$
1.5	$1.36 \cdot 10^4$	$5.29 \cdot 10^3$	$2.29 \cdot 10^3$	$1.55 \cdot 10^3$	$1.27 \cdot 10^3$	$1.21 \cdot 10^3$
2	$2.70 \cdot 10^3$	$1.08 \cdot 10^3$	$4.87 \cdot 10^2$	$3.38 \cdot 10^2$	$2.84 \cdot 10^2$	$2.70 \cdot 10^2$
3	$6.70 \cdot 10^2$	$2.84 \cdot 10^2$	$1.39 \cdot 10^2$	$1.02 \cdot 10^2$	$8.79 \cdot 10^1$	$8.42 \cdot 10^1$
4	330.83	148.14	77.563	58.873	51.808	49.872
5	210.44	98.713	54.484	42.482	37.884	36.617

В таблице 2 представлены расчеты, выполненные как по аналитическим формулам, так численно.

Табл. 2. Сравнение аналитического и численного методов для $R = 2$

Метод	δ=0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Аналит.	$2.70 \cdot 10^3$	$1.08 \cdot 10^3$	$4.87 \cdot 10^2$	$3.38 \cdot 10^2$	$2.84 \cdot 10^2$	$2.70 \cdot 10^2$
МГЭ	$2.68 \cdot 10^3$	$1.08 \cdot 10^3$	$4.88 \cdot 10^2$	$3.40 \cdot 10^2$	$2.85 \cdot 10^2$	$2.71 \cdot 10^2$

Путем предельного перехода $R_2 \to \infty$ при фиксированном R_1 можно получить движение цилиндра к плоской стенке или от нее. В этом случае коэффициент сопротивления отличен от нуля. Обозначим через h отстояние цилиндра радиуса R_1 от стенки. Все предыдущие формулы и алгоритм численного определения коэффициентов справедливы и для предельного случая при $R_2 \to \infty$, за исключением параметра b в (4.1), который имеет предел $b = R_1 + h$. Внутренний радиус кольца по-прежнему будет равен 1, внешний равен $R = \zeta(b)$.

Вычисления показывают, что для отношений $h/R_1 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ и 1 произведение $C_x Re = 361.1, 150.3, 94.36, 69.54$ и 55.74 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes G.G. *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*//Trans. Camb. Phil. Soc.– 1851.– V. 9. – Part II. – P. 8–106.

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика.* Т. II. – М.: Гостехиздат, 1948.

3. Биркгоф Г. *Гидродинамика.* – М.: ИЛ, 1963. – 244 с.

4. Oseen C.W. *Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*// Ark. Math. Astronom. Fis. – 1910. – V. 6. – No. 29.

5. Kaplun S. *Low Reynolds number flow past a circular cylinder*// J. Math. Mech. – 1957. – No. 6. – P. 595–603.

6. Proudman I., Pearson J.R.A. *Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder*// Fluid Mech. – 1957. – No. 2. – P. 237–262.

7. Ван-Дайк М. *Методы возмущений в механике жидкости.* – М.: Мир, 1967. – 310 с.

8. Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости.* – М.: Мир, 1973. – 758 с.

9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1965. – 716 с.

10. Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости.* – М.: Наука, 1979. – 536 с.

11. Терентьев А.Г. *Математические вопросы кавитации.* – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1981. – 131 с.

12. Terentiev A.G., Zhitnicov V.P. & Dimitrieva N.A. *An application of analytic functions to axisymmetric flow problems* //Appl. Math. Modelling. – 1997. – V. 21. – No. 2. – P. 91–96.

13. Elliot L., Ingham D.B., El Bashir T.B.A. *The boundary element method for the solution of slow flow problems for which a paradoxical cituation arises* //Proc. Int. conf. Boundary element methods in fluid dynamics II, Southampton, UK, 1994. – P. 3–10.

14. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов.* – М.: Мир, 1987. – 524 с.

15. Терентьев А.Г. *Численное исследование в гидродинамике*// Известия АН ЧР. – Чебоксары. – 1994. – № 2. – Вып. 1. – С. 61–84.