ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБРАТНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Г.М. Моргунов

Московский энергетический институт (технический университет)
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14,
ggm@ggm.mpei.ac.ru

Введение. Известны решения двумерных обратных гидродинамических задач для крыловых профилей методом граничных интегральных уравнений (МГИУ), часто называемым также методом особенностей (см. например, [1–3]). Эти методы, основанные на сингулярных решениях системы уравнений Коши-Римана, нашли в свое время эффективное применение в авиа- и турбостроении при проектировании высококачественных несущих поверхностей. Ниже дается развитие указанных подходов на пространственный случай.

Общая математическая модель МГИУ. Пусть $\vec{v}(P,t)$ – одна из определяющих субстанций законов сохранения механики жидкости или газа (например, скорость – количество движения, отнесенное к единице массы), $P(\vec{\xi})$ и $P_0(\vec{x}_0)$ ($Q(\vec{\xi})$ и $Q_0(\vec{x})$) – текущая и фиксированная внутренние (граничные) точки в выделенной замкнутой односвязной области пространства $\bar{V}: \vec{\xi} \wedge \vec{x} \in \bar{V} = V \cup S$, где граница S есть поверхность Ляпунова. Положим далее, что функция поля $\vec{v}(P,t)$ непрерывна вместе со своими частными производными по времени t и координатам ξ_i $(i=\overline{1,3})$ за исключением, быть может, замкнутого множества точек меры нуль.

Составим для $\vec{v}(P,t)$ обобщенную неоднородную систему уравнений Коши-Римана

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{\Omega}(P,t),\ \nabla \cdot \vec{v} = R(P,t),\ \forall P \in \bar{V}, \tag{1}$$

для которой пространственно-временная трансформация субстанции $\vec{v}$ рассматривается в эйлеровом представлении движения (∇ – оператор Гамильтона). Правые части (1) суть вихреисточниковые функции поля, для которых индивидуальные производные по времени в случае баротропных процессов даются уравнениями

$$D_t\vec{\Omega} = L_\omega\{\vec{v},\vec{\Omega},R,t\},\ D_tR = L_r\{\vec{v},R,t\},\ D_t = {D}/{dt}\,, \tag{2}$$

записанными в переменных Лагранжа. Структура интегро-дифференциальных операторов L_ω, L_r непосредственно следует из дифференциальных форм записи законов сохранения массы и количества движения. В частности, для модели идеальной текучей среды первое из представлений (2) является уравнением Гельмгольца-Фридмана динамической возможности движения [4].

Полная система уравнений (1) – (2) обычно оказывается существенно нелинейной, допускающей лишь численную реализацию итерационными процедурами (при наличии достаточно мощных компьютерных средств), сходимость которых вообще и к результату, достаточно близкому к экспериментальным данным, предполагается.

Обращение системы (1) приводит к трехмерному аналогу обобщенной формулы Коши теории аналитических функций [5–7]

$$\lambda\vec{v}(P_0) + \overset{(,)}{\int\limits_S}[\vec{v}(\nabla r^{-1}\cdot\vec{n}) + \vec{v}\times(\nabla r^{-1}\times\vec{n})]dS = \int\limits_V(\nabla r^{-1}R + \vec{\Omega}\times\nabla r^{-1})dV, \tag{3}$$

где $\lambda = 4\pi$ в точках $P_0 \in V$, $\lambda = 2\pi$ при $P_0 = Q_0 \in S$. В последнем случае интегральное представление (3) имеет смысл сингулярного интегрального уравнения (обозначено символом (,) над значком интеграла) относительно $\vec{v}(P_0)$. В (3) $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к S, r – расстояние между фиксированной $P_0 \vee Q_0$ и текущей $P \vee Q$ точками в $\bar{V}$.

В [5, 6] показано, что решение интегрального уравнения (3) существует и единственно, если на S задана нормальная v_n либо касательные $v_{S1} \wedge v_{S2}$ компоненты функции $\vec{v}$ (Q), а также плотности R, $\vec{\Omega}$ в интеграле по V. Ротация $\vec{\Omega}$ и расхождение R поля $\vec{v}$ определяются (при известных начальных, т. е. граничных для t условиях) непосредственным интегрированием (2) вдоль траекторий выделенных материальных точек с их последующим топологическим отображением на область $\bar{V}$.

Течение от локально распределенных особенностей. Для дальнейшего представляют интерес некоторые частные решения системы (1).

1. *Случай 2D-распределения вихреисточников.* Пусть $\vec{\gamma}(Q)$, $q(Q)$ – вихри и источники (стоки), непрерывно распределенные на конечной гладкой поверхности S°, $\delta^1(P-Q)$ – одномерная дельта-функция. Найдем решение системы

$$\nabla\times\vec{v}(P)=\vec{\gamma}(Q)\delta^1(P-Q),\ \nabla\cdot\vec{v}(P)=q(Q)\delta^1(P-Q) \tag{4}$$

для трехмерного евклидова пространства E, регулярное в бесконечно удаленной от S° точке. Здесь под регулярным понимаем решение, удовлетворяющее условию

$$\lim_{r(P_0,Q)\to\infty}\left|\vec{v}(P_0)\right|\le A[0]^k,\ k=\begin{cases}2,\ M<\infty\\1,\ M\sim[\infty]^1\\0,\ M\sim[\infty]^2\end{cases}, \tag{5}$$

где A – ограниченное положительное число, M – мера компактного множества точек распределения особенностей.

Пусть $V\subset\mathrm{E}$ и $S^\circ\in V$, на S° выбрана лицевая сторона с единичной нормалью $\vec{n}^+$, S_- – граница V. Выделим S° из области V замкнутой поверхностью S_+. Тогда в соответствии с (3) имеем

$$4\pi\vec{v}(P_0)+\int\limits_{S_+\cup S_-}[\vec{v}(Q)\frac{\partial r^{-1}}{\partial n}+r^{-3}(\vec{v}(Q)\times(\vec{r}\times\vec{n}))]\ dS=0.$$

Обозначим $\Delta\vec{v}=\vec{v}^+-\vec{v}^-$, где $\vec{v}^\pm$ – предельные значения $\vec{v}$ с лицевой и тыльной сторон поверхности S° соответственно. Будем расширять S_- в бесконечность, а S_+ сжимать к S°. Тогда в пределе с учетом регулярности искомого решения при $P\to\infty$ и в силу равенств

$$\vec{\gamma}(Q)+\vec{n}^+\times\Delta\vec{v},\ q(Q)=\vec{n}^+\cdot\Delta\vec{v}$$

найдем

$$4\pi\vec{v}(P_0)=\int\limits_S r^{-3}[q(Q)\vec{r}+(\vec{\gamma}(Q)\times\vec{r})]\ dS. \tag{6}$$

2. *Случай 1D-распределения вихреисточников.* Положим теперь, что L – замкнутая либо неограниченная нить непрерывно распределенных вихреи-

сточников. Определим в пространстве E регулярное на бесконечности в смысле (5) поле $\vec{v}$ (P), $P \neq Q$ от особенностей на $L(Q)$. В этом случае

$$\nabla \times \vec{v}(P) = \gamma_S \vec{s} \delta^2 (P-Q),\ \nabla \cdot \vec{v}(P) = q_S \delta^2 (P-Q),\ Q \in L, \tag{7}$$

где $\vec{s}$ – орт касательной к кривой L, $\delta^2(P-Q)$ – дельта-функция второго порядка, q_S, γ_S – напряжение источников и вихрей. Согласно (7) имеем

$$\lim_{\Delta S \to 0} \vec{\Omega}(P)\Delta S = \gamma_S \vec{s},\ \lim_{\Delta S \to 0} R(P)\Delta S = q_S(Q).$$

Здесь ΔS – элемент площади сечения, нормального к L в точке $Q \in \{\Delta S \cap L\}$, причем из условия $\nabla \cdot \vec{\Omega} = 0$ следует $\gamma_S = \mathrm{const}$. В результате из общего представления (3) получим

$$4\pi \vec{v}(P_0) = \int_L r^{-3} q_S(Q) \vec{r} dl + \gamma_S \int_L r^{-3} (\vec{s} \times \vec{r}) dl,\ P_0 \neq Q. \tag{8}$$

Если $q_S=0$, приходим к известной формуле Био-Савара.

МГИУ в обратной задаче для несущих поверхностей. Развиваемый метод носит достаточно общий характер (см. выше, а также [8–10]) и, в принципе, может быть применен для численного решения (комбинированный метод граничных элементов – МГЭ) внешних и внутренних задач гидрогазодинамики (прямых и обратных) при широких предположениях о свойствах и режимах течения рабочей среды. Однако в дальнейшем в целях сокращения выкладок и большей компактности изложения ограничимся упрощенной моделью потенциального 3D-течения идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть крылья (вообще – несущие поверхности летательного аппарата) образованы замкнутыми поверхностями $S_l^{\pm}$ (знак + относится, например, к правому крылу по отношению к направлению полета). Обозначим через S_0 остальную фиксированную часть поверхности летательного аппарата (ЛА), включая фюзеляж (без участков закрепления на нем корневых сечений крыльев), поверхности управления полетом ЛА, а также поверхности ближних и дальних аэродинамических следов, приближенно имитирующих отрывные зоны за соплами авиадвигателей. Задана дозвуковая скорость набегающего потока $\vec{v}_0$ (используется схема с обращением движения).

Далее, для упрощения рассуждений и выкладок выходные кромки крыльев C^* и их свободных торцевых окончаний C_0^* будем считать острыми.

Введем глобальную (для всего ЛА) $(x_i) \vee (\xi_i)$ и локальную (s_i) правые декартовые системы координат. Выделим внутри $S_l = S_l^+ \cup S_l^-$ фиктивную поверхность особенностей $S_l^* = S_l^{*+} \cup S_l^{*-}$. В частности, S_l^* можно определить как "среднюю" (скелетную) поверхность крыльев. На S_l^* отсчет координат s_1 (с соответствующим направлением орта $\vec{s}_1$) будем вести от сечения $C_* \in S_l^*$, определяемого как проекция на S_l^* линий резкого изменения кривизны входной закругленной кромки крыльев. Направление отсчета s_2 и ориентацию орта $\vec{s}_2$ примем от кромок C_0^*. Единичный вектор $\vec{s}_3$ образует с $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ правую тройку.

Распределим на S_l^*, начиная от $C_* \in S_l^*$ особенности: источники-стоки $q(s_1,s_2)$ и вихри $\gamma_{S1}(s_1,s_2)$, $\gamma_{S2}(s_1,s_2)$ (см. также [8, 9]). За C^* имеем поверхность S_P вихревой пелены, ориентированной по вектору скорости спутного потока и уходящей в бесконечность. Интенсивность свободных вихрей $\vec{\gamma}_S$ определяется производной вдоль C^* профильных циркуляций Γ_P. С торцевых кромок C_0^* вниз по потоку вдоль линии L сходят вихревые образования интегральной интенсивности Γ_P^* за точкой $C^* \cap C_0^*$, равной профильной циркуляции для торцевых окончаний крыльев Γ_P^*. Свободные вихри γ_S интегральной интенсивности, равной разности $\Delta\Gamma_{PC} = \Gamma_P^+ - \Gamma_P^-$ профильных циркуляций вокруг корневых сечений правого и левого крыла (в общем случае отличной от нуля), сносятся вдоль поверхностей фюзеляжа и хвостового оперения в кормовую часть ЛА, образуя за ним уходящий в бесконечность осевой жгут. Тогда, согласно приведенным ранее результатам, для проекций скорости v течения от набегающего потока $\vec{v}_0$ и особенностей имеем $(i = 1, 2, 3)$

$$\lambda[v_i(P_0)-v_{0i}(P_0)]=-\int\limits_{S_0}^{(.)}\{v_i(Q)\frac{\partial r^{-1}}{\partial n}+\frac{[\vec{v}(Q)\times(\vec{r}\times\vec{n})]_i}{r^3}\}dS+$$

$$+\int\limits_{S_l^*}^{(.)}r^{-3}\{q(Q)r_i+[\vec{\gamma}(Q)\times\vec{r})]_i\}dS+\int\limits_{S_p}^{(.)}r^{-3}\gamma_S(\vec{s}_S\times\vec{r})_i dS+\int\limits_{C_0^*\cup L}\Gamma_P^*(s_C)r^{-3}(\vec{s}_C\times\vec{r})_i dl, \tag{9}$$

$$\vec{s}_S=\vec{v}(Q\in S_S)v(Q\in S_S)^{-1};\quad v_{sj}=\sum_{i=1}^{3}v_i s_{ij};v_{S3}=v_n,$$

где s_{ij} – направляющие косинусы между (ξ_j) и (s_i). На поверхности ЛА $S=S_l\cup S_0$ $v_{S3}=v_n$ – нормальная, v_{S1},v_{S2} – касательные к S компоненты скорости. Кроме того, для рассматриваемого здесь класса течений имеем (опуская для простоты параметры Ламе) .

$$\nabla\vec{\gamma}=0:\gamma_{S1}(s_1,s_2)=\int\limits_0^{s_1}\frac{\partial\gamma_{S2}}{\partial s_2}ds_1;\quad \gamma_s=\frac{d\Gamma_P}{ds_c},\quad \Gamma_P^*(s_C\in C_0^*)=\int\limits_0^{s_C}\gamma_{S2}ds_c \tag{10}$$

Постулат Жуковского-Чаплыгина на выходных кромках $C^*\cup C_0^*$ сводится к требованию

$$(\vec{\gamma}\cdot\vec{s}_C)=0. \tag{11}$$

В (9) – (11) $\vec{s}_C$ – орт касательной к кромкам C^*,C_0^*; s_C – текущая длина в направлении $\vec{s}_C$ данных кромок. В подобластях, ограниченных поверхностями крыльев S_P, рассматривается фиктивное течение от особенностей и набегающего потока такое, чтобы результирующее течение удовлетворяло условию $v_n=0$ на S.

Постановка обратной задачи. Итерационная схема решения. Возможно следующее обобщение на 3D случай известной из двумерной (2D) теории решеток профилей обратной задачи (о.з.) [3].

Заданы: скорость набегающего потока $\vec{v}_0$; поверхности S_0; проекции кромок C_*, C^*и C_0^* скелетных поверхностей S_l^* крыльев в плане; профильные циркуляции $\Gamma_p(s_2)$ и изменение толщины крыльев $\delta(s_1,s_2)$; желаемый характер распределения компоненты $\upsilon_{s1}(s_1,s_2)$ скорости на одной (обычно верхней) стороне несущей поверхности.

Требуется: определить координаты пространственной поверхности S_l и поле скоростей вокруг границы S ЛА.

Для удобства численной реализации о.з. целесообразно подобно приему, используемому в 2D случае, представить особенности в виде рядов

$$
\begin{gathered}
q(\bar{s}_1, s_2) = \left(\frac{1-\bar{s}_1}{\bar{s}_1}\right)^{1/2} B_{-1}(s_2) + \left[\bar{s}_1(1-\bar{s}_1)\right]^{1/2} \times \\
\times \left[B_0(s_2) + \sum_{k=1}^{n}\left(B_k(s_2)\cos\pi k(2\bar{s}_1 - 1) + B_{k+n}(s_2)\sin\pi k(2\bar{s}_1 - 1)\right)\right],
\end{gathered} \tag{12}
$$

$$
\begin{gathered}
\gamma_{s2}(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \left(\frac{1-\bar{s}_1}{\bar{s}_1}\right)^{1/2} A_{-1}(s_2) + \left[\bar{s}_1(1-\bar{s}_1)\right]^{1/2} \times \\
\times\left[A_0(s_2) + \sum_{k=1}^{n}\left(A_k(s_2)\cos\pi k(2\bar{s}_1 - 1) + A_{k+n}(s_2)\sin\pi k(2\bar{s}_1 - 1)\right)\right] + \\
+ s_1^{-1/2} A_{2n+1}(s_2),\ \bar{s}_1 = s_1/s_1^*,\ s_1^* \in C^*.
\end{gathered} \tag{13}
$$

В связи с тем, что порядок n разложений (12), (13) для 3D высок, выражения в квадратных скобках содержат тригонометрические (конечные) ряды вместо степенных, используемых в 2D-теории. Укажем также, что коэффициент A_{2n+1} введен для удовлетворения условию (11).

При численном расчете задается 3D-сетка граничных элементов на S_0 и S_l^*. В расчетных зависимостях осуществляется переход к формулам численных кубатур и квадратур. В результате при соответствующем выборе числа членов рядов (12), (13) образуется замкнутая система линейных алгебраических уравнений относительно $\bar{\upsilon}(Q \in S_0)$, $q(Q \in S_l^*)$, $\bar{\gamma}(Q \in S_l^*)$. Порядок сформированной таким образом системы разрешающих уравнений оказывается высоким, в связи с чем задача решается методом последовательных приближений. Задаются геометрия крыльев S_l, а также физически обоснованным образом распределения искомых функций на S_0 и S_l^* в исходном (нулевом) приближении. Отыскиваются скорости $\upsilon_{s1}^{(1)}$ на S в первой итерации. Определяются невязки $\Delta\upsilon_n(Q \in S_l^*)$ и уточняются положения S_l^* в пространстве, а вместе с ними и конфигурация крыльев, т. е. поверхностей $S_l^{\pm}$. Далее итерационный цикл повторяется до удовлетворения заданному критерию сходимости, например, $|\Delta\upsilon_n| < [\varepsilon_n]$.

Заключение. Предложен метод непосредственного решения обратной гидроаэродинамической задачи для несущих поверхностей ЛА, обладающий повышенной степенью общности и основанный на применении МГИУ. Такой подход имеет определенные преимущества перед апосредственным методом решения обратных задач, базирующимся на оптимизированных процедурах решения последовательности прямых задач. Развиваемый подход представляется более экономичным, позволяет использовать богатый опыт решения о.з. методом особенностей, накопленный в 2D-теории крыловых профилей. Эффективно реализуется постулат Жуковского-Чаплыгина. Данный метод достаточно гибок в отношении постановочных аспектов решаемой задачи, формирования расчетных сеток и вполне приспособлен к целям проектирования несущих поверхностей ЛА с заранее прогнозируемыми аэродинамическими качествами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов Л.А. *Расчет обтекания крыловых профилей и построение профиля по распределению скоростей на его поверхности* //ПММ. – 1947. – Т. 2. – Вып. 1 – С. 69–84.

2. Лесохин А.Ф. *Расчет лопастей рабочих колес осевых турбин (решетка профилей конечной толщины)* //Тр. ЛПИ, Энергомашиностр. – 1953. – № 5. – С. 49–65.

3. Викторов Г.В., Моргунов Г.М. *Решение обратной задачи решеток профилей на осесимметричных поверхностях тока в переменном слое* //Изв. АН СССР. МЖГ. – 1968. – № 4. – С. 83–89.

4. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* – М.: Наука, 1978. – 736 с.

5. Аржаных И.С. *Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости.* – Ташкент: Изд–во АН УзССР, 1954. – 108 с.

6. Моргунов Г.М. *Трехмерный аналог обобщенной формулы Коши и одно его приложение в гидромеханике* //Изв. АН СССР. МЖГ. – 1974. – № 2. – С. 50–152.

7. Wu J.C., Thompson J.F. *Numerical solution of time dependent incompressible Navier–Stokes equations using an integro–differential formulation* //J. Comp. Fluids. – 1973. – V. 1. – No. 2. – P. 197–215.

8. Моргунов Г.М. *Пространственное обтекание лопастных систем турбомашин установившимся потоком идеальной жидкости* //Изв. АН СССР. МЖГ. – 1975. – № 6. – С. 3–12.

9. Моргунов Г.М. *Интегральный метод расчета вихревого баротропного течения в турбомашинах* //Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 6. – С. 3–12.

10. Моргунов Г.М. *Расчет безотрывного обтекания пространственных лопастных систем с учетом вязкости* //Изв. АН СССР. Энерг. и трансп. – 1985. – № 1. – С. 117–126.