К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РЕШЕТОК

А.Г.Лабуткин, Р.Б.Салимов

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x+iy$ расположена решетка контуров, период которой равен $te^{i\nu}, t > 0, 0 < \nu < \pi$. Решетка обтекается установившимся потенциальным потоком несжимаемой невязкой жидкости, комплексный потенциал его обозначим $w(z)$. Значение комплексной скорости $w'(z)$ на бесконечности слева от решетки обозначим через $v_1 e^{-i\alpha_1}, -\pi/2 < \alpha_1 < \pi/2$, справа от решетки – через $v_2 e^{-i\alpha_2}$, $-\pi/2 < \alpha_2 < \pi/2$. Поток, обтекающий решетку, имеет период $te^{i\nu}$, то есть $w'(z + te^{i\nu}) = w'(z)$.

Обозначим через L_Z контур решетки, проходящий через точку $z = 0$. Введем плоскость комплексного переменного $\xi = \rho e^{i\gamma} (\rho > 0)$. Пусть $z = z(\xi)$ – функция, отображающая конформно внешность решетки контуров на бесконечнолистную риманову поверхность внутри системы концентрических окружностей, имеющих уравнение $|\xi| = 1$, когда бесконечно удаленным точкам слева и справа от решетки отвечают точки соответственно $\xi = -q$ и $\xi = q, 0 < q < 1$. Эта функция отображает конформно круг $|\xi| < 1$ с разрезом по отрезку, соединяющему точки $\xi = -q$, $\xi = q$, на область, ограниченную контуром решетки и двумя конгруэнтными линиями, причем разность комплексных координат соответственных точек линии, лежащей выше контура, и линии, расположенной ниже контура, равна $te^{i\nu}$ [1] (с. 132). В дальнейшем будем рассматривать ветвь $z(\xi)$, которая окружность $|\xi| = 1$ переводит в контур L_Z. Обозначим

$$w[z(\xi)] = W(\xi) \qquad (1)$$

и будем рассматривать $W(\xi)$ как комплексный потенциал некоторого течения в области $|\xi| \leq 1$.

Результаты решения прямой задачи изложены в книге [1] (с. 123–139) (см. также [2] с. 291–297). Рассмотрим обратную задачу. Пусть s есть дуговая координата точки контура L_Z, отсчитываемая от точки A разветвления потока в направлении, при котором область течения остается слева, l – периметр контура L_Z, $s = s_B$ – дуговая координата точки B схода потока на L_Z. Требуется определить форму контура L_Z решетки, если на нем задано распределение величины скорости в виде $v = v(s)$, $0 \le s \le l$, $v(0) = 0, v(l) = 0, v(s_B) = 0$. Функцию $v(s)$ считаем удовлетворяющей условию Гельдера, кроме того, примем, что существуют конечные односторонние производные, удовлетворяющие условиям $v'(0) = -v'(l) \neq 0$, $v'(s_B + 0) = -v'(s_B - 0) \neq 0$. Остальные величины, относящиеся к потоку вокруг решетки и к самой решетке, определяются в процессе решения задачи.

Решению обратной задачи посвящено большое число работ, обзор их имеется в статье [4].

Ниже рассматривается приближенное решение обратной задачи, которое может быть получено значительно проще в том случае, когда заданное на искомом контуре решетки распределение скорости близко к распределению скорости на известном контуре некоторой решетки в том смысле, что разности скоростей в соответствующих точках указанных контуров являются малыми величинами, и величинами второго порядка относительно этих малых можно пренебречь. В дальнейшем величины, относящиеся к искомой измененной решетке, будем обозначать теми же буквами, как соответствующие величины известной решетки, снабжая их верхней волнистой чертой ~.

Для простоты примем, что $\tilde{l} = l, \tilde{s}_B = s_B$. Пусть распределение скорости вдоль искомого контура L_Z измененной решетки задано в виде

$$\tilde{v}(s) = v(s) + \varepsilon f(s), \quad 0 \le s \le l, \tag{2}$$

где $v(s)$ – известное распределение скорости вдоль контура L_Z исходной известной решетки, удовлетворяющее условиям, указанным выше при постановке обратной задачи; $f(s)$ – функция, имеющая конечные односторонние производные в точках $0,\ s_B, l$ и удовлетворяющая соотношениям $f(0)=f(l)=0$, $f(s_B)=0$, $f'(0)=-f'(l)$, $f'(s_B+0)=-f'(s_B-0)$. Здесь ε – малая положительная величина, причем величинами порядка ε^2 можно пренебречь. Примем, что $v(s), f(s)$ имеют производные в интервалах $(0,s_B)$, (s_B,l). Будем считать, что все функции и величины, относящиеся к исходной решетке, известны.

Зная функцию $v=v(s)$, вычислим значения потенциала скорости на контуре L_Z:

$$\varphi=\varphi(s)\equiv\int_0^s v(s)ds,\quad 0\le s\le s_B,\quad \varphi=\varphi(s)\equiv\int_s^l v(s)ds,\quad s_B\le s\le l. \tag{3}$$

Обозначим

$$\varphi_B=\int_0^{s_B} v(s)ds,\ \varphi_H=\int_{s_B}^{l} v(s)ds. \tag{4}$$

Тогда циркуляция скорости по контуру L_Z будет равна $\Gamma=\varphi_B-\varphi_H$. Всюду в дальнейшем будем считать $\Gamma\ne0$, если не оговорено противное.

В силу (1) имеем

$$\varphi(s)=\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B),\ \gamma_B-2\pi\le\gamma\le\gamma_B, \tag{5}$$

где $\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)$ есть потенциал скорости на окружности $\xi=e^{i\gamma}$. При известных числах $\tilde\gamma=\tilde\gamma_*(\gamma)$ это соотношение определяет зависимость $v=v(s)$.

Функция $\ln w_z'(z)=\chi\ (\xi)\ (z=z(\xi))$ аналитична в круге $|\xi|<1$, ее граничные значения выражаются формулой

$$\chi(e^{i\gamma})=\ln v[s(\gamma)]-i\eta[s(\gamma)], \tag{6}$$

где $\eta(s)$ – угол, образованный с действительной осью вектором скорости на контуре L_Z.

В силу (2) $\Delta v(s)=\tilde v(s)-v(s)=\varepsilon f(s)=o(\varepsilon)$ есть малая порядка ε. Тогда из формул (3), (4) видно, что

$$\Delta\varphi(s)=\tilde{\varphi}(s)-\varphi(s)=\int_0^s\Delta\nu(s)ds,\quad 0\le s\le s_B,$$

$$\Delta\varphi(s)=\int_s^l\Delta\nu(s)ds,\ s_B\le s\le l,\ \ \Delta\varphi_B=\tilde{\varphi}_B-\varphi_B=\int_0^{s_B}\Delta\nu(s)ds,$$

$$\Delta\varphi_H=\tilde{\varphi}_H-\varphi_H=\int_{s_B}^{l}\Delta\nu(s)ds,\ \Delta\Gamma=\tilde{\Gamma}-\Gamma=\Delta\varphi_B-\Delta\varphi_H$$

также являются малыми порядка ε. Всюду в дальнейшем величины порядка $o(\varepsilon^2)$ будем отбрасывать. Будем считать, что $\Delta q=\tilde{q}-q$, $\Delta t=\tilde{t}-t$, $\Delta\nu=\tilde{\nu}-\nu$, $\Delta\gamma_A=\tilde{\gamma}_{\tilde{A}}-\gamma_A$, $\Delta\gamma_B=\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}-\gamma_B$ являются малыми порядка ε.

Из формулы

$$\tilde{\varphi}(s)=\varphi_1(\tilde{\gamma},\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}),\quad \tilde{\gamma}_{\tilde{B}}-2\pi\le\tilde{\gamma}\le\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}, \tag{7}$$

аналогичной (5), определяется зависимость $s=\tilde{s}(\tilde{\gamma})$ на $(0,s_B)$. Соотношение

$$\tilde{s}(\tilde{\gamma})=s(\gamma),\ \tilde{\gamma}_B-2\pi\le\tilde{\gamma}\le\tilde{\gamma}_B,\ \gamma_B-2\pi\le\gamma\le\gamma_B, \tag{8}$$

определяет функцию $\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}(\gamma)$, причем $\tilde{\gamma}(\gamma_B-2\pi)=\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}-2\pi$, $\tilde{\gamma}(\gamma_A)=\tilde{\gamma}_{\tilde{A}}$, $\tilde{\gamma}(\gamma_B)=\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}$. Пусть

$$\Omega(\gamma)=\begin{cases}(\gamma-\gamma_A)/(\gamma_B-\gamma_A),\ \gamma_A\le\gamma\le\gamma_B,\\(\gamma-\gamma_A)/(\gamma_B-2\pi-\gamma_A),\ \gamma_B-2\pi\le\gamma\le\gamma_A.\end{cases}$$

Обозначим

$$\tilde{\gamma}_*(\gamma)=\begin{cases}\tilde{\gamma}_{\tilde{A}}+(\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}-\tilde{\gamma}_{\tilde{A}})\Omega(\gamma),\ \gamma_A\le\gamma\le\gamma_B,\\\tilde{\gamma}_{\tilde{A}}+(\tilde{\gamma}_{\tilde{B}}-2\pi-\tilde{\gamma}_{\tilde{A}})\Omega(\gamma),\ \gamma_B-2\pi\le\gamma\le\gamma_A.\end{cases}$$

Тогда

$$\Delta\tilde{\gamma}_*(\gamma)=\tilde{\gamma}_*(\gamma)-\gamma=\Delta\gamma_A(1-\Omega(\gamma))+\Delta\gamma_B\Omega(\gamma). \tag{9}$$

Соотношение (7) с учетом (5) запишем так:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(s)-\varphi(s)&=\varphi_1(\tilde{\gamma}(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})-\varphi_1(\tilde{\gamma}_*(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})+\\&+\varphi_1(\tilde{\gamma}_*(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})-\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B),\end{aligned} \tag{10}$$

$s=s(\gamma)$, $\gamma_B-2\pi\le\gamma\le\gamma_B$. В пределах принятой точности можно положить

$$\begin{aligned}&\varphi_1(\tilde{\gamma}(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})-\varphi_1(\tilde{\gamma}_*(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})=\\&=\frac{\partial}{\partial\gamma}[\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)](\tilde{\gamma}(\gamma)-\tilde{\gamma}_*(\gamma)).\end{aligned} \tag{11}$$

С учетом (11) из (10) находим

$$\tilde{\gamma}(\gamma)-\tilde{\gamma}_*(\gamma)=\frac{\Delta\varphi(s)-[\varphi_1(\tilde{\gamma}_*(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})-\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)]}{\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)}, \tag{12}$$

$$s=s(\gamma),\quad \gamma_B-2\pi\le\gamma\le\gamma_B.$$

Разность в квадратных скобках в числителе этой формулы (приращение функции φ_1) заменим с принятой точностью полным дифференциалом функции $\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)$, то есть суммой

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\Delta\tilde{\gamma}_*(\gamma)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\Delta\Gamma+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\Delta q+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A}\Delta\gamma_A+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B}\Delta\gamma_B.$$

Тогда с учетом формулы (9) получим

$$\varphi_1(\tilde{\gamma}_*(\gamma),\tilde{\Gamma},\tilde{q},\tilde{\gamma}_{\tilde{A}},\tilde{\gamma}_{\tilde{B}})-\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\Delta\Gamma+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\Delta q+$$

$$+\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}(1-\Omega(\gamma))\right]\Delta\gamma_A+\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\Omega(\gamma)\right]\Delta\gamma_B. \tag{13}$$

Приняв во внимание соотношения (5) и (7), отсюда получим при $\gamma=\gamma_B$ и $\gamma=\gamma_B-2\pi$ соответственно

$$\Delta\varphi_B=\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\right|_{\gamma=\gamma_B}\cdot\Delta\Gamma+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right|_{\gamma=\gamma_B}\cdot\Delta q+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A}\right|_{\gamma=\gamma_B}\cdot\Delta\gamma_A+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B}\right|_{\gamma=\gamma_B}\cdot\Delta\gamma_B, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_H=&\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\right|_{\gamma=\gamma_B-2\pi}\cdot\Delta\Gamma+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right|_{\gamma=\gamma_B-2\pi}\cdot\Delta q+\\&+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A}\right|_{\gamma=\gamma_B-2\pi}\cdot\Delta\gamma_A+\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B}\right|_{\gamma=\gamma_B-2\pi}\cdot\Delta\gamma_B.\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь, как и в формуле (13), φ_1 означает $\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B)$, кроме того, учтено, что $\partial\varphi_1/\partial\gamma$ обращается в нуль в точках γ_B, $\gamma_B-2\pi$. Теперь формулу (12) с учетом (13)–(15) запишем в виде

$$\tilde{\gamma}(\gamma)-\tilde{\gamma}_*(\gamma)=\left[\Delta U(\gamma)+U_1(\gamma)\Delta q+U_A(\gamma)\Delta\gamma_A+U_B(\gamma)\Delta\gamma_B\right]\Big/\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}, \tag{16}$$

здесь при $\gamma_A\le\gamma\le\gamma_B$

$$\Delta U(\gamma) = \Delta\varphi(s) - \Delta\varphi_B \frac{\varphi_1}{\varphi_B} + [\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_B} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}]\Delta\Gamma, \quad s = s(\gamma),$$

$$U_1(\gamma) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\Big|_{\gamma=\gamma_B} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}, \quad U_A(\gamma) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A}\Big|_{\gamma=\gamma_B} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}(1 - \Omega(\gamma)),$$

$$U_B(\gamma) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B}\Big|_{\gamma=\gamma_B} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_B} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\Omega(\gamma),$$

при $\gamma_B - 2\pi \le \gamma \le \gamma_A$

$$\Delta U(\gamma) = \Delta\varphi(s) - \Delta\varphi_H \frac{\varphi_1}{\varphi_H} + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_B-2\pi} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_H} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\Gamma}\right]\Delta\Gamma, \quad s = s(\gamma),$$

$$U_1(\gamma) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\Big|_{\gamma=\gamma_B-2\pi} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_H} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial q}, U_B(\gamma) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B}\Big|_{\gamma=\gamma_B-2\pi} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_H} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_B} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}\Omega(\gamma),$$

$$U_A(\gamma) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A}\Big|_{\gamma=\gamma_B-2\pi} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_H} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma_A} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}(1 - \Omega(\gamma)),$$

причем φ_1 означает $\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)$.

Формула (16) позволяет найти функцию $\tilde{\gamma}(\gamma)$, когда известны числа $\Delta q, \Delta\gamma_A, \Delta\gamma_B$. Продифференцировав соотношения (5), (7) и вычтя полученные выражения, найдем

$$\pm[\tilde{s}'(\tilde{\gamma}) - s'(\gamma)] = \frac{v(s) - \tilde{v}(s)}{\tilde{v}(s)v(s)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma} + \frac{1}{\tilde{v}(s)}\left\{(\tilde{\gamma}(\gamma) - \tilde{\gamma}_*(\gamma))\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma\partial\Gamma}\Delta\Gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma\partial q}\Delta q + \left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma\partial\gamma_A} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma^2}(1 - \Omega(\gamma))\right]\Delta\gamma_A + \left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma\partial\gamma_B} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\gamma^2}\Omega(\gamma)\right]\Delta\gamma_B\right\}, \quad (17)$$

$s = s(\gamma)$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$, $\varphi_1 = \varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)$. Эта формула вместе с (16) позволяет определить производную $\tilde{s}'(\tilde{\gamma})$.

Замечая, что в силу (7) $\tilde{s}(\tilde{\gamma}(\gamma)) = s(\gamma)$, с принятой точностью имеем

$$\frac{\tilde{v}[\tilde{s}(\tilde{\gamma}_*(\gamma))]}{\tilde{v}[\tilde{s}(\tilde{\gamma}(\gamma))]} = 1 - \frac{\tilde{v}[\tilde{s}(\tilde{\gamma}(\gamma))] - \tilde{v}[\tilde{s}(\tilde{\gamma}_*(\gamma))]}{\tilde{v}(s)} = 1 - \frac{v'(s)s'(\gamma)}{v(s)}[\tilde{\gamma}(\gamma) - \tilde{\gamma}_*(\gamma)].$$

Кроме того, с той же точностью

$$\ln\widetilde{v}(s)=\ln v(s)+\ln\left(1+\frac{\Delta v(s)}{v(s)}\right)=\ln v(s)+\frac{\Delta v(s)}{v(s)},\ s=s(\gamma),\qquad(18)$$

поэтому

$$\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma}_*))]=\ln v(s)+\frac{\Delta v(s)}{v(s)}-\frac{v'(s)s'(\gamma)}{v(s)}[\widetilde{\gamma}(\gamma)-\widetilde{\gamma}_*(\gamma)].$$

Последнюю формулу, принимая во внимание (16), запишем в виде

$$\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma}_*))]=\ln v(s)+\frac{\Delta v(s)}{v(s)}-\frac{v'(s)s'(\gamma)}{v(s)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\gamma}}[\Delta U(\gamma)+U_1(\gamma)\Delta q+$$

$$+U_A(\gamma)\Delta\gamma_A+U_B(\gamma)\Delta\gamma_B],\ s=s(\gamma),\ \varphi_1=\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B).\qquad(19)$$

Функция (6) для измененной решетки запишется так:

$$\widetilde{\chi}(e^{i\widetilde{\gamma}})=\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})]-i\widetilde{\eta}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})],$$

где $\widetilde{\eta}(\widetilde{s})$ – угол, образованный с действительной осью вектором скорости на контуре $\widetilde{L}_Z$. Поэтому (см., например, [6], с. 58, 59)

$$\widetilde{\chi}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_B-2\pi}^{\widetilde{\gamma}_B}\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})]\frac{e^{i\widetilde{\gamma}}+\xi}{e^{i\widetilde{\gamma}}-\xi}d\widetilde{\gamma}-i\widetilde{\eta}_0,$$

$$\widetilde{\eta}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma}_0)]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_B-2\pi}^{\widetilde{\gamma}_B}\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})]\operatorname{ctg}\frac{\widetilde{\gamma}-\widetilde{\gamma}_0}{2}d\widetilde{\gamma}+\widetilde{\eta}_0,\qquad(20)$$

где $\widetilde{\eta}_0$ – произвольная действительная постоянная.

Учитывая, что функция $\widetilde{\chi}(\xi)$ в точке $\xi=-\widetilde{q}$ принимает значение $\ln\widetilde{v}_1-i\widetilde{\alpha}_1$, получим

$$\ln\widetilde{v}_1-i(\widetilde{\alpha}_1-\eta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_B-2\pi}^{\widetilde{\gamma}_B}\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})]\frac{e^{i\widetilde{\gamma}}-\widetilde{q}}{e^{i\widetilde{\gamma}}+\widetilde{q}}d\widetilde{\gamma}.\qquad(21)$$

В интеграле последней формулы сделаем замену $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\gamma}_*(\gamma)$, получим

$$\ln\widetilde{v}_1-i(\widetilde{\alpha}_1-\widetilde{\eta}_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}\ln\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma}_*(\gamma))]\frac{e^{i\widetilde{\gamma}_*(\gamma)}-\widetilde{q}}{e^{i\widetilde{\gamma}_*(\gamma)}+\widetilde{q}}\widetilde{\gamma}'_*(\gamma)d\gamma,\qquad(22)$$

причем в силу (9)

$$\widetilde{\gamma}_*(\gamma)=\gamma+\Delta\widetilde{\gamma}_*(\gamma)=\gamma+\Delta\gamma_A(1-\Omega(\gamma))+\Delta\gamma_B\Omega(\gamma),\qquad(23)$$

$$\widetilde{\gamma}'_*(\gamma)=1-\Delta\gamma_A\Omega'(\gamma)+\Delta\gamma_B\Omega'(\gamma).\qquad(24)$$

Обозначим $\Delta v_1 = \tilde{v}_1 - v_1, \Delta\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 - \alpha_1, \Delta\eta_0 = \tilde{\eta}_0 - \eta_0$. По аналогии с формулой (18) имеем $\ln\tilde{v}_1 = \ln v_1 + \Delta v_1/v_1$. Поэтому из формул (22) и аналогичной (21) для исходного контура получим

$$\frac{\Delta v_1}{v_1} - i(\Delta\alpha_1 - \Delta\eta_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}\left\{\ln\tilde{v}[\tilde{s}(\tilde{\gamma}_*(\gamma))]\frac{e^{i\tilde{\gamma}_*(\gamma)} - \tilde{q}}{e^{i\tilde{\gamma}_*(\gamma)} + \tilde{q}}\tilde{\gamma}'_*(\gamma) - \right.$$
$$\left. - \ln v[s(\gamma)]\frac{e^{i\gamma} - q}{e^{i\gamma} + q}\right\}d\gamma. \qquad (25)$$

С принятой точностью, с учетом (23), имеем

$$\frac{e^{i\tilde{\gamma}_*(\gamma)} - \tilde{q}}{e^{i\tilde{\gamma}_*(\gamma)} + \tilde{q}} = \frac{e^{i\gamma} - q}{e^{i\gamma} + q} - \Delta q\frac{2e^{i\gamma}}{(e^{i\gamma} + q)^2} + \frac{i2e^{i\gamma}}{(e^{i\gamma} + q)^2}[\Delta\gamma_A(1 - \Omega(\gamma)) + \Delta\gamma_B\Omega(\gamma)].$$

Принимая во внимание последнюю формулу, а также соотношения (19), (24), формулу (25) запишем так:

$$\frac{\Delta v_1}{v_1} - i(\Delta\alpha_1 - \Delta\eta_0) = \Delta d_{10} + a_{11}\Delta q + a_{12}\Delta\gamma_A + a_{13}\Delta\gamma_B. \qquad (26)$$

Аналогично, учитывая, что функция $\tilde{\chi}(\xi)$ в точке $\xi = \tilde{q}$ принимает значение $\ln v_2 - i\alpha_2$, придем к формуле

$$\frac{\Delta v_2}{v_2} - i(\Delta\alpha_2 - \Delta\eta_0) = \Delta d_{20} + a_{21}\Delta q + a_{22}\Delta\gamma_A + a_{23}\Delta\gamma_B, \qquad (27)$$

где $\Delta v_2 = \tilde{v}_2 - v_2, \Delta\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2 - \alpha_2$,

$$\Delta d_{10} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}\Delta X_{10}(\gamma)d\gamma, \Delta d_{20} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}\Delta X_{20}(\gamma)d\gamma,$$

$$a_{1k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}X_{1k}(\gamma)d\gamma,\ a_{2k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}X_{2k}(\gamma)d\gamma, k = 1,2,3,$$

$$\Delta X_{10}(\gamma) = \Delta V_0(\gamma)S_1(\gamma,q), \quad X_{11}(\gamma) = V_1(\gamma)S_1(\gamma,q) - S_2(\gamma,q)\ln v(s),$$

$$X_{12}(\gamma) = V_A(\gamma)S_1(\gamma,q) + S_2(\gamma,q)q\,i(1 - \Omega(\gamma))\ln v(s),$$

$$X_{13}(\gamma) = V_B(\gamma)S_1(\gamma,q) + S_2(\gamma,q)q\,i\Omega(\gamma)\ln v(s),$$

$$S_1(\gamma,q) = \frac{e^{i\gamma} - q}{e^{i\gamma} + q}, S_2(\gamma,q) = \frac{2e^{i\gamma}}{(e^{i\gamma} + q)^2}, \Delta V_0(\gamma) = \frac{\Delta v(s)}{v(s)} + S_0(\gamma)\Delta U(\gamma),$$

$$V_1(\gamma) = S_0(\gamma)U_1(\gamma), \quad V_A(\gamma) = S_0(\gamma)U_A(\gamma) - \Omega'(\gamma)\ln v(s),$$

$$V_B(\gamma) = S_0(\gamma)U_B(\gamma) + \Omega'(\gamma)\ln v(s),$$

$$S_0(\gamma) = -[v'(s)s'(\gamma)] \Big/ \left[v(s)\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_1(\gamma,\Gamma,q,\gamma_A,\gamma_B) \right]$$

$$\Delta X_{20}(\gamma) = \Delta V_0(\gamma)S_1(\gamma,-q), \quad X_{21}(\gamma) = V_1(\gamma)S_1(\gamma,-q) + S_2(\gamma,-q)\ln v(s),$$

$$X_{22}(\gamma) = V_A(\gamma)S_1(\gamma,-q) - S_2(\gamma,-q)q\,i(1-\Omega(\gamma))\ln v(s),$$

$$X_{23}(\gamma) = V_B(\gamma)S_1(\gamma,-q) - S_2(\gamma,-q)q\,i\,\Omega(\gamma)\ln v(s), \quad s = s(\gamma).$$

Используя результаты работ [1] (с. 123–139), [5] (с. 170–172) с учетом обозначений, принятых в работе [7] (с. 97, 98), получим уравнение

$$T(v_1,v_2,\alpha,q,\gamma_A,\gamma_B) = \left[1-\frac{v_2}{v_1}\exp(-i(\alpha_2-\alpha_1))\right]\left(q\exp(-i\frac{\gamma_A+\gamma_B}{2}) + \right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{\gamma_B-\gamma_A}{2} + \frac{1}{q}\exp(i\frac{\gamma_A+\gamma_B}{2})\right) - 4\cos\frac{\gamma_B-\gamma_A}{2} = 0,$$

где $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Обозначая $\Delta\alpha = \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1 = \tilde{\alpha} - \alpha$, это уравнение для измененной решетки запишем в виде

$$T(v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2, \alpha + \Delta\alpha, q + \Delta q, \gamma_A + \Delta\gamma_A, \gamma_B + \Delta\gamma_B) = 0.$$

Вычтя почленно из последнего соотношения предыдущее и заменив полученную в левой части разность полным дифференциалом функции $T(v_1,v_2,\alpha,q,\gamma_A,\gamma_B)$, придем к уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial v_1}\Delta v_1 + \frac{\partial T}{\partial v_2}\Delta v_2 + \frac{\partial T}{\partial \alpha}(\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1) + \frac{\partial T}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial T}{\partial \gamma_A}\Delta\gamma_A + \frac{\partial T}{\partial \gamma_B}\Delta\gamma_B = 0,$$

которое в силу равенств

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = \frac{1}{iv_1}\frac{\partial T}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial v_2} = -\frac{1}{iv_2}\frac{\partial T}{\partial \alpha}$$

можно представить в виде

$$v_1\frac{\partial T}{\partial v_1}\left[\frac{\Delta v_1}{v_1}-i(\Delta\alpha_1-\Delta\eta_0)\right]-v_2\frac{\partial T}{\partial v_2}\left[\frac{\Delta v_2}{v_2}-i(\Delta\alpha_2-\Delta\eta_0)\right]+$$
$$+\frac{\partial T}{\partial q}\Delta q+\frac{\partial T}{\partial \gamma_A}\Delta\gamma_A+\frac{\partial T}{\partial \gamma_B}\Delta\gamma_B=0.$$

Подставим сюда выражения (26), (27) и получим соотношение

$$\left[v_1\frac{\partial T}{\partial v_1}(a_{11}-a_{21})+\frac{\partial T}{\partial q}\right]\Delta q+\left[v_1\frac{\partial T}{\partial v_1}(a_{12}-a_{22})+\frac{\partial T}{\partial \gamma_A}\right]\Delta\gamma_A+$$
$$+\left[v_1\frac{\partial T}{\partial v_1}(a_{13}-a_{23})+\frac{\partial T}{\partial \gamma_B}\right]\Delta\gamma_B=v_1\frac{\partial T}{\partial v_1}(\Delta d_{20}-\Delta d_{10}), \tag{28}$$

здесь, как и выше, T означает $T(v_1,v_2,\alpha,q,\gamma_A,\gamma_B)$.

Соотношения (14), (15), (28) представляют собой систему уравнений для определения $\Delta q,\Delta\gamma_A,\Delta\gamma_B$. После того, как определены $\Delta q,\Delta\gamma_A,\Delta\gamma_B$, по формулам (26), (27) найдем $\Delta v_1,\Delta\alpha_1-\Delta\eta_0,\Delta v_2,\Delta\alpha_2-\Delta\eta_0$, а затем $\tilde v_1,\tilde\alpha_1-\tilde\eta_0,\tilde v_2,\tilde\alpha_2-\tilde\eta_0$. Тогда период измененной решетки выразится формулой

$$\tilde t e^{i\tilde v}=\tilde\Gamma e^{i(\eta_0+\Delta\eta_0)}\Big/\left[\tilde v_1 e^{-i(\tilde\alpha_1-\tilde\eta_0)}-\tilde v_2 e^{-i(\tilde\alpha_2-\tilde\eta_0)}\right],$$

здесь величина η_0 считается известной, $\Delta\eta_0=o(\varepsilon)$ может быть выбрана произвольно (если значение η_0 заранее не вычислено, то величину $\tilde\eta_0=\eta_0+\Delta\eta_0$ нужно выбрать так, чтобы $\tilde t e^{i\tilde v}-te^{iv}=o(\varepsilon)$).

По формулам (9), (16) найдем $\tilde\gamma_*(\gamma),\tilde\gamma(\gamma)$, по формуле (17) – производную $\tilde s'(\gamma)$. В интеграле формулы (20) сделаем замену $\tilde\gamma=\tilde\gamma_*(\gamma)$ и примем, что $\tilde\gamma_0=\tilde\gamma_*(\gamma_0)$. Тогда получим

$$\tilde\eta[\tilde s(\tilde\gamma_*(\gamma_0))]-\eta[s(\gamma_0)]=\Delta\eta_0+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_B-2\pi}^{\gamma_B}\left\{\ln\tilde v[\tilde s(\tilde\gamma_*(\gamma))]\tilde\gamma_*'(\gamma)\operatorname{ctg}\frac{\tilde\gamma_*(\gamma)-\tilde\gamma_*(\gamma_0)}{2}\Big/\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}-\right.$$
$$\left.-\ln v[s(\gamma)]\right\}\operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma.$$

Используя последнюю формулу и принимая во внимание соотношения (19), (23), (24), нетрудно проверить, что при $\tilde\gamma=\tilde\gamma_*(\gamma)$

$$\widetilde{\chi}(e^{i\widetilde{\gamma}}) - \chi(e^{i\gamma}) = \ln\frac{\widetilde{v}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})]}{v[s(\gamma)]} - i(\widetilde{\eta}[\widetilde{s}(\widetilde{\gamma})] - \eta[s(\gamma)]) = o(\varepsilon).$$

Из формулы (1) следует, что $z'(\xi) = W'(\xi)/w'(z(\xi))$. Отсюда, учитывая, что на окружности $\xi = e^{i\gamma}$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B) = W'(e^{i\gamma})ie^{i\gamma},$$

для измененной решетки получим

$$\widetilde{z}(e^{i\widetilde{\gamma}}) = \int\limits_{\widetilde{\gamma}_B - 2\pi}^{\widetilde{\gamma}} e^{-\widetilde{\chi}(e^{i\widetilde{\gamma}})}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\gamma}}\varphi_1(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{q}, \widetilde{\gamma}_A, \widetilde{\gamma}_B)d\widetilde{\gamma}.$$

Пусть $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_*(\gamma)$, эту же замену сделаем в интеграле последней формулы. Замечая, что в пределах принятой точности

$$\exp[-\widetilde{\chi}(e^{i\widetilde{\gamma}})] = \exp[-\chi(e^{i\gamma})][1 - \widetilde{\chi}(e^{i\widetilde{\gamma}}) + \chi(e^{i\gamma})],$$

получим

$$\widetilde{z}(e^{i\widetilde{\gamma}_*(\gamma)}) - z(e^{i\gamma}) = \int\limits_{\gamma_B - 2\pi}^{\gamma} e^{-\chi(e^{i\gamma})}\left\{\left[\chi(e^{i\gamma}) - \widetilde{\chi}(e^{i\widetilde{\gamma}_*(\gamma)})\right]\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_1(\widetilde{\gamma}_*(\gamma), \widetilde{\Gamma}, \widetilde{q}, \widetilde{\gamma}_{\widetilde{A}}, \widetilde{\gamma}_{\widetilde{B}}) - \frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_1(\gamma, \Gamma, q, \gamma_A, \gamma_B)\right\}d\gamma, \ \gamma_B - 2\pi \le \gamma \le \gamma_B.$$

Эта формула определяет комплексные координаты искомого контура $\widetilde{L}_Z$.

Обзор работ, посвященных решению рассмотренной задачи и аналогичных обратных краевых задач, имеется в статье [4].

Расчет распределения скорости при малых деформациях профилей решеток выполнен Степановым Г.Ю. [5] (с. 177–182). Решение этой задачи в случае изолированного профиля впервые дано Лаврентьевым М.А. [3] (с. 393–398).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.* – М.: Наука, 1980. – 448 с.

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика.* Т. 1. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 583 с.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.

4. Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т., Салимов Р.Б., Тумашев Г.Г. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения* // Итоги науки и техники. Математический анализ. – М.: Наука, 1980. – Т. 18. – С. 67–124.

5. Степанов Г.Ю. *Гидродинамика решеток турбомашин.* – М.: ГИФМЛ, 1962. – 512 с.

6. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

7. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.