

# ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

**Н.Б.Ильинский, А.В.Поташев**

*НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева  
Казанского государственного университета  
420008, Казань, ул. Университетская, 17  
Nikolay.Plinskiy@ksu.ru, Andrey.Potashhev@ksu.ru*

При реализации аналитических решений обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА) приходится сталкиваться с различными трудностями численного характера, в частности, с вычислением сингулярных интегралов, понимаемых в смысле главного значения по Коши, плотности которых, как правило, имеют логарифмические особенности. Так при построении крылового профиля по методу Г.Г.Тумашева логарифмические особенности возникают в точках разветвления и схода потока [1,2]. Определенное внимание этому вопросу было уделено Г.Г.Тумашевым в работе [1]. Развитый в последние десятилетия метод квазирешений ОКЗА для выполнения условий разрешимости также содержит определенные тонкости при численной реализации (см., например, [3]). Наконец, существенные осложнения при численной реализации аналитических решений возникают при построении гидродинамических решеток профилей, особенно при увеличении их густоты [4]. Описанию названных проблем и методик их преодоления посвящена настоящая работа.

**1. Постановка и решение основной ОКЗА.** Начнем изложение с постановки и краткого описания метода решения основной ОКЗА (так в последние годы стали называть задачу построения изолированного крылового профиля, обтекаемого потоком идеальной несжимаемой жидкости, по заданному вдоль его контура распределению скорости как функции дуговой абсциссы этого контура; именно этой задачей больше всего занимался Г.Г.Тумашев [1]).

Пусть искомый крыловой профиль (рис. 1,а) обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданным значением  $v_\infty$  скорости на бесконечности. Контур  $L_z$  профиля предполагается замкнутым и гладким, за исключением задней кромки  $B$ , где внутренний к области течения угол равен  $\pi\epsilon$ ,  $1 \leq \epsilon \leq 2$ . Вдоль  $L_z$  задано распределение скорости потока  $v = v(s)$ , где  $s \in [0, L]$  – дуговая абсцисса контура  $L_z$ ,  $L$  – заданный периметр контура  $L_z$  (рис. 1,б). Требуется определить форму профиля, угол атаки  $\alpha$ , коэффициент подъемной силы  $C_y$  и другие аэродинамические характеристики.

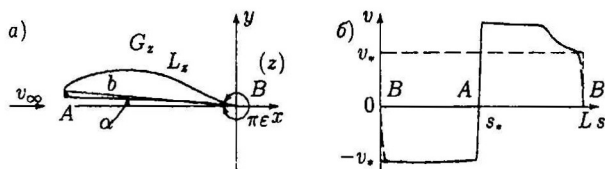


Рис. 1

Решение задачи сводится к нахождению аналитической функции  $z(\zeta)$ , осуществляющей конформное отображение канонической области (внешности круга единичного радиуса  $|\zeta| > 1$  в плоскости  $\zeta = re^{i\gamma}$ ) на внешность искомого профиля.

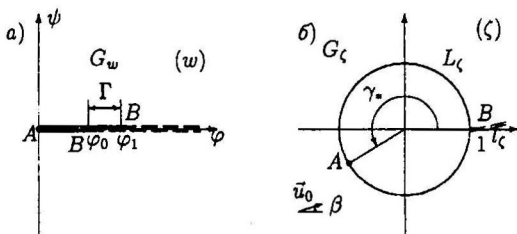


Рис. 2

Г.Г.Тумашев [1] при решении основной ОКЗА ввел функцию  $\chi = \ln(dw/dz) = S - i\theta$ , где  $z = x + iy$ ,  $w(z) = \varphi + i\psi$  – комплексный потенциал течения. Если далее ввести в рассмотрение области  $G_w$  и  $G_\zeta$  в плоскостях  $w$  (рис. 2 а) и  $\zeta = re^{i\gamma}$  (рис. 2 б), конформно эквивалентные области течения  $G_z$ , то интегральное представление решения по

Г.Г.Тумашеву будет иметь вид

$$z(\zeta) = \int_1^{\zeta} e^{-\chi(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta, \quad (1.1)$$

где

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\tau) \frac{\zeta + e^{i\tau}}{\zeta - e^{i\tau}} d\tau - i\theta_*, \quad (1.2)$$

$$S(\gamma) \equiv \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) = \ln v(s(\gamma)).$$

**2. Выделение особенностей.** Нетрудно заметить, что функция  $S(\gamma) = \ln v[s(\gamma)]$  имеет особенности в точке  $A$  разветвления потока и при  $\varepsilon < 2$  в точке  $B$  схода потока, то есть при  $\gamma = \gamma_*$  и  $\gamma = 0$ , что может привести к существенным трудностям при численном вычислении интеграла в (1.2). Для преодоления этой трудности следует учесть характер поведения  $dw/dz \sim (\zeta - \zeta_*)$  и  $dw/dz \sim (\zeta - 1)^{2-\varepsilon}$ . Тогда от функции  $\chi(\zeta)$  целесообразно перейти к новой функции

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\zeta) &= \chi(\zeta) - \chi_0(\zeta) = \tilde{S} - i\tilde{\theta}, \\ \chi_0(\zeta) &= (2 - \varepsilon) \ln(1 - 1/\zeta) + \ln(1 - \zeta_*/\zeta), \end{aligned} \quad (2.1)$$

не имеющей особенностей. Если также учесть, что

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_*}{\zeta}\right),$$

то окончательно формула (1.1) перепишется в виде

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_1^{\zeta} (1 - 1/\zeta)^{\varepsilon-1} \exp[-\tilde{\chi}(\zeta)] d\zeta. \quad (2.2)$$

Отметим, что и при решении других ОКЗА (например, для профиля с источниками и стоками на контуре, для профиля в двухслойном потоке или для профиля с закрылом, моделируемым точечными или распределенными особенностями [3]) при соответствующем выборе в формуле (2.1) функции  $\chi_0(\zeta)$  решение  $z = z(\zeta)$  сохраняет вид (2.2).

**3. Вычисление интеграла с ядром Гильберта.** Наибольшие трудности при численной реализации описанного выше решения возникают при вычислении сингулярного интеграла

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \tau}{2} d\tau. \quad (3.1)$$

Известны различные способы численного нахождения значений интегралов вида (3.1), называемых интегралами с ядром Гильберта. Один из наиболее распространенных из них состоит в разложении функции  $\tilde{S}(\gamma)$  в ряд Фурье

$$\tilde{S}(\gamma) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma) \quad (3.2)$$

и нахождении функции  $\tilde{\theta}(\gamma)$  в виде гармонически сопряженного ряда

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\gamma - b_k \cos k\gamma).$$

Такой способ позволяет аналитически записать искомую функцию  $\tilde{\theta}(\gamma)$  и тем самым найти ее значение в любой точке. Этот способ эффективен в тех случаях, когда функция  $\tilde{S}(\gamma)$  не имеет больших градиентов. Тогда в (3.2) можно ограничиться небольшим конечным числом слагаемых. В противном случае рост требуемого числа членов ряда приводит к увеличению времени расчета, так как нахождение каждого из коэффициентов  $a_k, b_k$  требует численного вычисления интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \begin{Bmatrix} \cos k\gamma \\ \sin k\gamma \end{Bmatrix} d\gamma.$$

Другой способ состоит в выделении особенности в подынтегральном выражении в правой части формулы (3.1) и численном интегрировании функции без особенностей. Если учесть, что

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \tau}{2} d\tau = 0,$$

то выражение (3.1) можно переписать в виде

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \int_0^{2\pi} [\tilde{S}(\tau) - \tilde{S}(\gamma)] \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \tau}{2} d\tau \equiv \int_0^{2\pi} F(\tau, \gamma) d\tau. \quad (3.3)$$

Функция  $F(\tau, \gamma)$ , стоящая под знаком интеграла, не имеет особенности в точке  $\tau = \gamma$ , а ее предел  $\lim_{\tau \rightarrow \gamma} F(\tau, \gamma) = -2S'(\gamma)$ .

Таким образом, для нахождения функции  $\tilde{\theta}(\gamma)$  можно применять формулы численного интегрирования правой части выражения (3.3).

В частности, если воспользоваться методом трапеций, то формулу (3.3) в дискретном виде можно записать следующим образом:

$$\theta_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{F_{k,j} + F_{k+1,j}}{2} (\gamma_{k+1} - \gamma_k), \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.4)$$

где  $F_{k,j} = F(\tau_k, \gamma_j)$ ,  $\tau_k, \gamma_j \in [0, 2\pi]$ ,  $k, j = \overline{1, N}$ .

Применение формулы (3.4) позволяет находить значения  $\tilde{\theta}(\gamma)$  при произвольном разбиении интервала  $\gamma \in [0, 2\pi]$ . Недостатками такого подхода являются необходимость численного дифференцирования функции  $\tilde{S}(\gamma)$ , заданной, как правило, дискретно, и большой объем вычислений.

Снизить затраты машинного времени позволяет использование специальных **квадратурных формул**, к которым относятся, например, формулы, полученные Б.Г.Габдулхаевым [5] для случая равномерного распределения точек  $\gamma_k$  в интервале  $[0, 2\pi]$ . В частности, если интервал разбит точками  $\gamma_k$  на четное количество  $N = 2n$  участков, то есть  $\gamma_k = (k-1)\pi/n$ ,  $k = \overline{1, N+1}$ , и точки  $\gamma_j$ , в которых требуется найти  $\theta_j$ , совпадают с  $\gamma_k$  ( $\gamma_j = (j-1)\pi/n$ ,  $j = \overline{1, N+1}$ ), то значения  $\tilde{\theta}(\gamma)$  находятся в виде

$$\tilde{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{S}_{2m-1} & \text{при } j = 2l \\ \tilde{S}_{2m} & \text{при } j = 2l + 1 \end{array} \right\} \text{ctg} \frac{2(l-m)+1}{2n} \pi. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) достаточно проста для численной реализации, тем более, что можно избежать вычисления котангенсов при нахождении каждого из слагаемых. Для этого нужно лишь один раз рассчитать значения  $J_\nu = \text{ctg}[(2\nu-1)\pi/2n]$ , а затем лишь находить нужное значение  $\nu$ .

Из сравнения формул (3.4) и (3.5) видно, что при одинаковом расположении точек  $\gamma_k$  и  $\gamma_j$  последняя формула требует значительно меньших затрат времени счета. Однако применение формулы (3.5) имеет и недостатки. Дело в том, что при нахождении значений  $\tilde{\theta}_j$  в точках с четными номерами используются только величины  $\tilde{S}_k$  с нечетными номерами и наоборот. Поэтому, если одно из значений  $\tilde{S}_k$  задано с

погрешностью, то в результате можем получить функцию  $\tilde{\theta}(\gamma)$  в виде, изображенном штриховой кривой на рис. 3. Здесь приведен только небольшой сильно увеличенный фрагмент функции  $\tilde{\theta}(\gamma)$  (расстояние между расчетными точками равно  $\pi/100$ ). Из рисунка видно, что значения в четных и нечетных точках дают по отдельности две гладкие кривые, а вместе - ломаную.

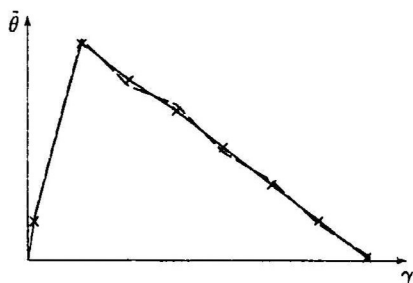


Рис. 3

Такого поведения  $\tilde{\theta}(\gamma)$  можно избежать, если при использовании формулы (3.5) считать, что точки  $\gamma_k$  лежат в центре отрезков  $(\gamma_j, \gamma_{j+1})$ , то есть  $\gamma_k = (2k - 1)\pi/N$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Тогда будем иметь

$$\tilde{\theta}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n \tilde{S}_k \operatorname{ctg} \frac{2(k-j)+1}{2N} \pi. \quad (3.6)$$

Использование формулы (3.6) приводит к двукратному увеличению времени счета по сравнению с формулой (3.5), однако дает более гладкую функцию  $\tilde{\theta}(\gamma)$  (сплошная кривая на рис. 3). Следует отметить, что вычисление значений  $\tilde{\theta}(\gamma)$  с применением формулы (3.4) дает практически тот же результат (крестики на рис. 3), но время счета возрастает примерно в 4-5 раз.

**4. Условия разрешимости и способы их удовлетворения.** Особенностью ОКЗА является то, что они являются некорректными по Адамару. Дело в том, что в этих задачах возникают условия разрешимости (условия замкнутости искомого контура и совпадение скоростей на бесконечности, заданной и определяемой в процессе ре-

шения), которые имеют вид

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = B_1 + iB_2, \quad \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = B_3. \quad (4.1)$$

где  $B_1 + iB_2 = \pi(1 - \varepsilon)$ ,  $B_3 = 2\pi \ln v_\infty$ .

**Простейший способ** удовлетворения условий (4.1) состоит в замене первых трех коэффициентов в разложении функции  $\tilde{S}(\gamma)$ :

$$\tilde{S}(\gamma) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\gamma + d_k \sin k\gamma) \quad (4.2)$$

“нужными” значениями  $c_0 = B_3/\pi$ ,  $c_1 = B_1/\pi$ ,  $d_1 = B_2/\pi$ . Такой способ модификации исходных данных ОКЗА был предложен В.Манглером.

Более совершенный способ выполнения условий разрешимости носит название **метода квазирешений** (см., например, [3]) и состоит в замене функции  $\tilde{S}(\gamma)$  функцией

$$\tilde{S}^*(\gamma) = \tilde{S}(\gamma) + \begin{cases} T(\gamma), & \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \\ 0, & \gamma \notin [\gamma_1, \gamma_2], \end{cases}$$

где функция  $T(\gamma)$  должна удовлетворять условиям

$$\begin{cases} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T(\tau) e^{i\tau} d\tau = C_1 + iC_2, & \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T(\tau) d\tau = C_3, \\ T(\gamma_1) = T(\gamma_2) = 0 & \text{если } \gamma_1 \neq 0 \text{ и } \gamma_2 \neq 2\pi. \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3$  — невязки в условиях разрешимости (4.1).

Для отыскания функции  $T(\gamma)$ , вносящей, по возможности, наименьшие искажения в исходные данные, на нее дополнительно накладывалось условие минимизации некоторого функционала  $J(T)$ . В зависимости от вида этого функционала были получены различные квазирешения.

В **первом варианте** квазирешений полагалось  $J(T) \equiv J_0(T) = \|T\|_{L_2}$ . Тогда получено следующее представление функции  $T(\gamma)$

$$T(\gamma) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\tilde{\gamma} + d_k \sin k\tilde{\gamma}), \quad \tilde{\gamma} = \frac{2\pi(\gamma - \gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad (4.4)$$

причем выражения для коэффициентов  $c_k$  и  $d_k$  при переходе к отрезку ряда  $T_N(\gamma)$  конечной длины  $N$  записываются в явном виде.

Пример построения квазирешения (4.4), когда варьирование скорости допускалось только на нижней поверхности профиля, приведен на рис. 4 (кривая 0 – исходное распределение скорости, соответствующее разомкнутому контуру профиля, кривые 1 – результат применения простейшего способа (4.2)). Построенный контур 2 замкнут, а распределение скорости на его верхней поверхности совпадает с заданным. Однако у измененного распределения скорости имеются значительные градиенты на концах интервала коррекции (особенно заметно это выражено в окрестности точки  $s = 0$ ).

Объяснением этого факта служит проведенный численный эксперимент (его результаты приведены на рис. 4, в). Видно, что с ростом  $N$  функции  $T_N(\gamma)$  (штрих-пунктирная кривая соответствует  $N = 5$ , штриховая –  $N = 50$ , пунктирная –  $N = 100$ ) стремятся к функции вида  $T(\gamma) = c_0/2 + c_1 \cos k\gamma + d_1 \sin \gamma$  (сплошная кривая), дающей минимум функционалу  $J_0$  при первых ограничениях (4.3), но без условий, содержащихся во второй строке. Таким образом, равномерная сходимость последовательности  $T_N(\gamma)$  может нарушаться на концах интервала коррекции, что приводит к появлению указанных значительных градиентов скорости.

Для того, чтобы иметь возможность при модификации исходных данных получать более гладкие распределения скорости, предложен **второй вариант** построения квазирешения. Его суть состоит в замене функционала  $J_0(T)$  на функционал  $J_1(T) = \|T'\|_{L_2}$ . Этот способ построения квазирешения дает более гладкое распределение скорости (штрих-пунктирная кривая 3 на рис. 4, а), соответствующее замкнутому контуру (штрих-пунктирная кривая 3 на рис. 4, б). Однако при этом отличие величин скоростей вдоль нижней поверхности профиля больше, чем в первом случае.

Приведенные варианты квазирешений имеют простой аналитический вид, удобный для численной реализации. Следует однако отметить, что их применение гарантирует лишь замкнутость контура профиля. Для обеспечения же физической реализуемости решения в

множество корректности необходимо закладывать также и условия однолиственности. К сожалению, проблема построения квазирешений, учитывающих такие условия, к настоящему времени не решена и требует дальнейших исследований.

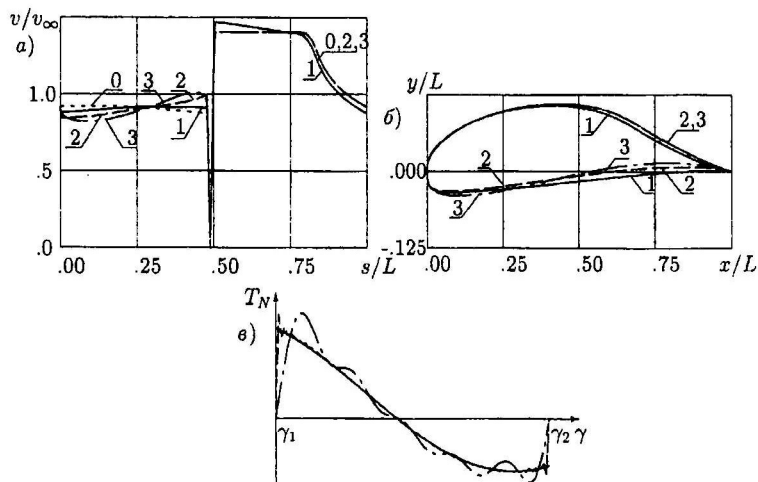


Рис. 4

**5. Особенности решения ОКЗА для гидродинамических решеток** обсуждаются в заключительной части доклада. **Постановка задачи** состоит в следующем. Искомая прямая однорядная решетка профилей шага  $t$  обтекается плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной скоростью на бесконечности перед решеткой (рис. 5, а). Декартову систему координат  $(x, y)$  в физической плоскости выберем так, чтобы ее начало совпало с задней кромкой одного из профилей, который назовем основным, а ось  $y$  направим параллельно фронту решетки. Необходимо определить форму конгруэнтных профилей, составляющих решетку, с гладким (за исключением, быть может, задней кромки) контуром по заданному на нем распределению скорости  $v = v(s)$ ,  $s \in [0, L]$  (рис. 5, б) и известным значениям шага  $t$  и параметров потока  $v_1, \theta_1$  перед решеткой. Ограничения, налагаемые на функцию  $v(s)$ , те же, что и в ОКЗА для изолированного профиля.

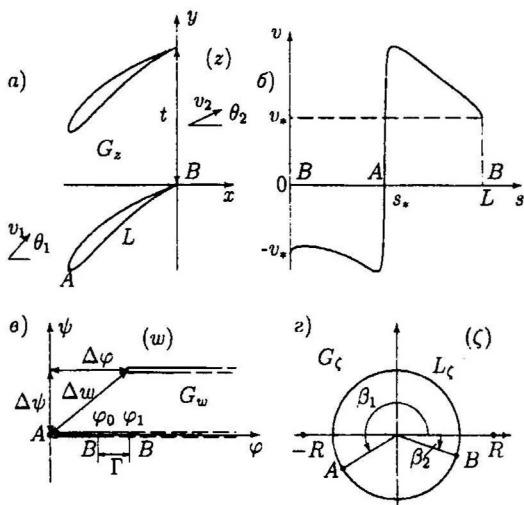


Рис. 5

**Аналитическое решение.** Области течения  $G_z$  в физической плоскости  $z$  с разрезами по линиям тока, сходящим с задних кромок профилей, соответствует вся плоскость  $w$  с полубесконечными разрезами, параллельными оси  $\varphi$  и смещенными друг относительно друга на величину  $\Delta w = itv_1 \exp(-i\theta_1)$  (рис. 5, в).

Для решения задачи используется метод сопоставления плоскостей, путем введения в качестве канонической области  $G_\zeta$  над плоскостью  $\zeta$  бесконечно-листной римановой поверхности с симметричными точками ветвления  $\zeta = \pm R$  и границей, проекцией которой является окружность единичного радиуса (рис. 5, г).

Конформное отображение области  $G_\zeta$  на область  $G_w$  осуществляется функцией

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left( \Gamma \ln \frac{\zeta - R}{R\zeta - 1} + \Delta w \ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} - \overline{\Delta w} \ln \frac{R\zeta + 1}{R\zeta - 1} \right) + C,$$

где  $\Gamma$  – циркуляция скорости вдоль контура каждого из профилей,  $C = \text{const}$ . Функция  $\chi(\zeta)$  находится по формуле (1.2), где величина  $\theta_*$  определяется условием  $\text{Im}\chi(-R) = -\theta_1$ . Интегральное представление решения имеет вид

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_{\zeta_2}^{\zeta} \exp[-\bar{\chi}(\zeta)] \frac{(1 - \zeta_2/\zeta)^{\epsilon-1} d\zeta}{(\zeta^2/R^2 - 1)[1 - (R\zeta)^{-2}]}$$

**Особенности численной реализации** указанной задачи обусловлены наличием точек ветвления  $\zeta = \pm R$ . Их влияние сказывается тем сильнее, чем более густой является решетка. При  $t \rightarrow 0$  величина  $R \rightarrow 1$  и уже при  $t/L \approx 0.1$  имеем  $R \approx 1 + 10^{-7}$ .

Эти особенности проявляются как при выделении особенностей, отыскании параметров решения, при вычислении интегралов с ядром Гильберта, так и при построении квазирешений. Полное описание результатов, посвященных решению возникающих при этом проблем, содержится в работе [4], поэтому в настоящем тексте доклада мы его не приводим.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 99-01-00365, 99-01-04029), программы "Университеты России" и фонда НИОКР АНТ.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тумашев Г.Г. *Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления* // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1952. – Т. 112. – Кн. 3. – С. 3–41.
2. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения*. 2-е издание. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
3. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики*. – М.: Наука, 1994. – 440 с.
4. Ильинский Н.Б., Исмагилова Г.Р., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи для гидродинамических решеток профилей*. – Препринт НИИММ им. Н.Г.Чеботарева № 94-3, 1994. – 84 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.