# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЯ МАКСИМУМА РАСХОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ НАКЛОННОЙ СТУПЕНИ

**Е.Р.Газизов, Д.В.Маклаков**

*НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева*
*Казанского государственного университета*
*420008, Казань, ул. Университетская, 17*
*evgeni.gazizov@ksu.ru, dmitri.maklakov@ksu.ru*

Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой весомой жидкости над неровным полигональным дном в форме наклонной ступени (рис. 1).

Вводится декартова система координат $(X, Y)$, причем ее начало лежит в основании ступени. Задается $h$ – глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, $V_0$ – скорость набегающего потока, $\beta\pi$ – угол наклона ступени к оси $Ox$, $g$ – ускорение силы тяжести. Сила тяжести действует в направлении, противоположном направлению оси $Oy$.

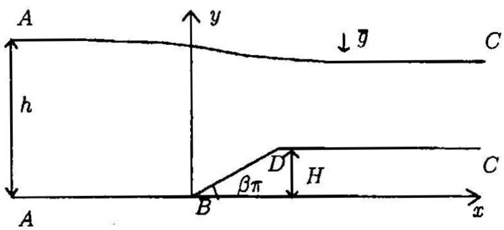


Рис. 1. Физическая область течения

Основным параметром, характеризующим течение тяжелой жидкости, является число Фруда $Fr = V_0/\sqrt{gh}$. Скорость $V_* = \sqrt{gh}$ называется критической. Если $Fr < 1$, то течение является докритическим, если $Fr > 1$ – сверхкритическим.

Исследуются безволновые режимы обтекания ступени для случая, когда докритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа.

Исходная задача сводится к краевой задаче отыскания аналитической в канонической области $D_t$ функции

$$\chi(t) = \ln(\frac{\pi}{2h}\frac{dz}{dt}).$$

В качестве канонической области выбирается полоса ширины $\pi/2$ в параметрической плоскости $t$. Путем выделения у искомой функции асимптотики поведения на бесконечности выводим замыкающее задачу условие нахождения неизвестного параметра $d$, определяющего высоту ступени в параметрической плоскости. Затем краевая задача отыскания аналитической в области $D_t$ функции $\chi(t)$ сводится к решению системы нелинейных интегральных уравнений. После дискретизации полученная система решается методом Ньютона. Подробный вывод приведен в [1].

При $H > 0$ задача об обтекании ступени может трактоваться как задача о водосливе с широким порогом. Если обозначить через $Q$ расход жидкости через водослив, то $Fr = Q/\sqrt{gh^3}$. Таким образом, при фиксированных $g$ и $h$ число Фруда прямо пропорционально расходу жидкости $Q$. В гидравлике для определения расхода через водослив используют так называемое условие максимума расхода (УМР), согласно которому на пороге водослива с течением времени сам собой устанавливается безволновой режим обтекания с максимальным расходом (см. [2]). Используем УМР для приближенного определения связи между $Fr$ и $H/h$.

Известно, что для любых течений над ступенью, у которых свободная поверхность имеет горизонтальные асимптоты слева и справа на бесконечности, справедливы формулы [3]:

$$Fr^2 + 2 = \frac{Fr^2}{(L - H/h)^2} + 2L, \tag{1}$$

$$Fr(\infty) = \frac{Fr}{(L - H/h)^{3/2}}. \tag{2}$$

Здесь $L = y(\infty)/h$, $y(\infty)$ – ордината свободной поверхности справа на бесконечности, $Fr(\infty)$ – число Фруда справа на бесконечности.

Будем считать, что уравнение (1) в неявном виде задает зависимость $Fr = Fr(L)$ при фиксированных $H/h$. Продифференцировав (1) по $L$, найдем

$$2FrFr'_L = \frac{2FrFr'_L(L - H/h) - 2(L - H/h)Fr^2}{(L - H/h)^4} + 2.$$

Подставив в эту формулу $Fr'_L = 0$, получим

$$\frac{Fr^2}{(L - H/h)^3} = Fr^2(\infty) = 1. \qquad (3)$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$L = H/h + Fr^{2/3}, \qquad (4)$$

а искомая связь между $Fr$ и $H/h$ следует из (1):

$$H/h = 1 + Fr^2/2 - \frac{3}{2}Fr^{2/3}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) является приближенным, и цель, преследуемая данной работой, состоит в возможном уточнении зависимости между $Fr$ и $H/h$.

Безволновой режим обтекания в случае, когда докритическое течение слева переходит в сверхкритическое справа, возможен лишь при определенном соотношении между высотой ступени и числом Фруда. Если воспользоваться гидравлическим условием максимума расхода, то это соотношение задается формулой (4), причем согласно УМР функция $H/h = H/h(Fr)$ не зависит от угла наклона ступени.

На рис. 2 показаны полученные графики зависимости $H/h$ от $Fr$ для различных углов наклона ступени. Штриховой линией нанесена зависимость (4). Как видно из рис. 2, все кривые практически сливаются между собой. Таким образом, исходя из рис. 2, можно сделать вывод при определении расхода, что УМР является приближенно верным.

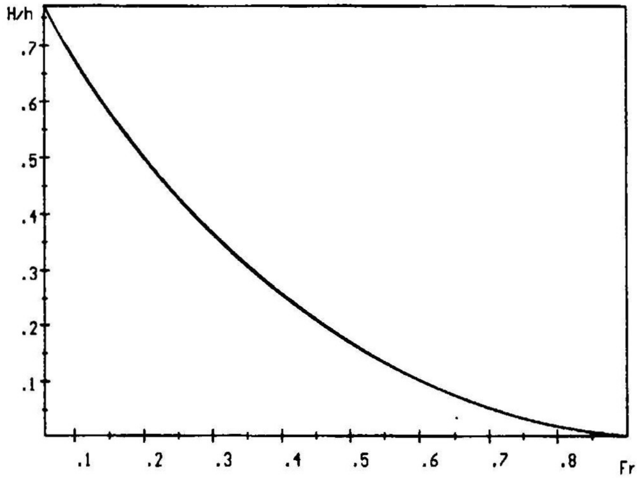


Рис. 2.

Однако количественные расхождения между вычисленными значениями и значениями, полученными по УМР, все же имеют место. Наглядно эти расхождения видны на графиках рис. 3, где показаны зависимости между безразмерной высотой свободной поверхности $L$ справа на бесконечности от безразмерной высоты ступени $H/h$ при различных углах наклона ступени $\beta$.

Результат, полученный с помощью УМР, нанесен пунктиром. Как видно из графика, УМР дает завышенное значение $L$, причем максимальное расхождение наблюдается при $H/h \approx 0.15$. Однако для всех $\beta$ зависимости между $L$ и $H/h$ оказываются очень близкими. Эта близость наводит на мысль, что результаты, полученные с помощью УМР, могут быть уточнены. В самом деле, согласно УМР поток справа на бесконечности всегда оказывается критическим, то есть $Fr(\infty) = 1$. Однако полученные численные данные показывают, что это не так. Число $Fr(\infty)$ всегда больше единицы и когда $Fr$ на бесконечности слева стремится к нулю, приближается к некоторому предельному значению, которое мало зависит от угла наклона ступени $\beta$, изменяясь от $Fr(\infty) = 1.1794$ при $\beta = 0.2$ до $Fr(\infty) = 1.1913$ при $\beta = 0.5$. На рис. 4 показаны графики зависимостей $Fr(\infty)$ от $Fr$ для различных углов наклона ступени $\beta$.

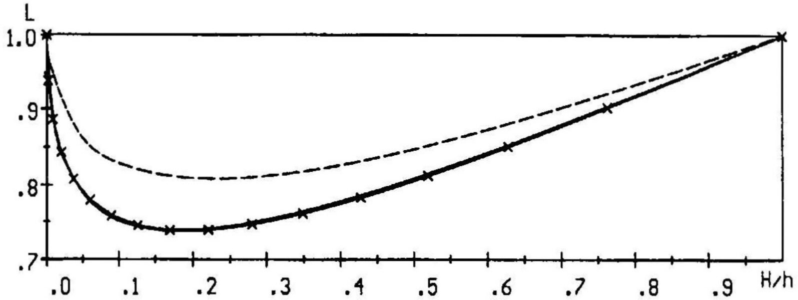


Рис. 3.

Как видно из рис. 4 , построенные функции слабо зависят от угла наклона ступени $\beta$. Пусть

$$Fr(\infty) = f(Fr) = a_1(1 - Fr)Fr^2 + a_2(1 - Fr^2) + 1,$$

где функция $f(Fr)$ обладает свойствами $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ при любых $a_1$, $a_2$. С помощью метода наименьших квадратов были найдены значения $a_1 = 0.1982$ и $a_2 = 0.1871$. Функция $f(Fr)$ для этих значений показана на рис. 4 пунктирной линией. Как видно из этого рисунка, найденная функция хорошо аппроксимирует вычисленные точки. Таким образом, для любых наклонов ступени в диапазоне $0.2 < \beta \leq 0.5$ мы получили универсальную приближенную аналитическую зависимость между $Fr$ и $Fr(\infty)$.

Из формул (1), (2) найдем, что

$$H/h = 1 + \frac{1}{2}\left(Fr^2 - \frac{Fr^{2/3}(Fr^2(\infty) + 2)}{Fr^{2/3}(\infty)}\right),$$

$$L = \frac{1}{2}(Fr^2 + 2 - Fr^{2/3}Fr^{4/3}(\infty)).$$

Параметрическая зависимость между $H/h$ и $L$ отмечена на рис. 3 крестиками. Как видно из рисунка, она дает значительно более точный результат, чем УМР.

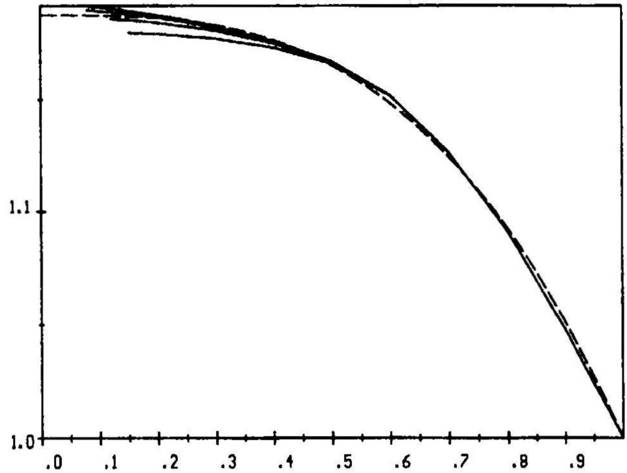


Рис. 4.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 99-01-00169, № 99-01-00173), фонда НИОКР АНТ, программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. *Безволновые режимы обтекания ступени* //Труды Математического центра им. Н.И. Лобаческого. – Казань: Изд-во Унипресс, 1999. – Т. 3. – С. 246–252.

2. Чугаев Р.Р. *Гидравлика.* – Л.: Энергоиздат, 1982. – С. 417.

3. Маклаков Д.В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами.* – М.: Янус-К, 1997. – 280 с.