ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ В РЕЗОНАТОРЕ [1]

А.А. Цупак (Пенза)

1. Постановка задачи дифракции

Пусть $P = \{x : 0 \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le b,\ 0 \le x_3 \le c,\}$ – резонатор с абсолютно проводящей поверхностью. В резонаторе расположено объемное тело Q, характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\varepsilon}$ являются гладкими функциями в области $\bar{Q}$.

Будем предполагать, что тело Q не касается стенок резонатора, а тензор $\left(\dfrac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)$ обратим в $\hat{Q}$. Вне Q среда изотропна и однородна: $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$, $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}$.

Рассмотрим следующую задачу дифракции: определить электромагнитное поле, возбуждаемое в резонаторе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$. Источник стороннего поля – токи $\vec{j}^{\,0}_H$, $\vec{j}^{\,0}_E$, расположенные вне тела Q.

Рассмотрим математическую постановку задачи дифракции. Необходимо определить векторы $\vec{E}, \vec{H}$ напряженности рассеянного электромагнитного поля, удовлетворяющие всюду в области резонатора (за исключением, может быть, ∂Q) уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} rot\ \vec{H} &= -i\omega\hat{\varepsilon}\vec{E} + \vec{j}^{\,0}_E\ , \\ rot\ \vec{E} &= i\omega\mu\vec{H} - \vec{j}^{\,0}_H\ , \end{aligned} \qquad (1)$$

условию непрерывности касательных компонент полного поля $\vec{E}^c$, $\vec{H}^c$ на границе ∂Q

$$\left[\vec{n} \times \vec{E}^c\right]\Big|_{\partial Q} = \left[\vec{n} \times \vec{H}^c\right]\Big|_{\partial Q} = 0, \qquad (2)$$

а также граничному условию на стенках резонатора

$$\vec{E}^c_\tau|_{\partial P} = 0\ . \qquad (3)$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-00053

Выразим компоненты поля через векторные потенциалы $\vec{A}_E$ и $\vec{A}_H$. Предварительно запишем уравнения (1) в эквивалентной форме:

$$rot\ \vec{H} = -i\omega\,\varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{j}_E\ ,$$
$$rot\ \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} - \vec{j}_H^{\,0}\ ,$$

где

$$\vec{j}_E = \vec{j}_E^{\,0} + \vec{j}_E^{\,p}. \tag{4}$$

В последнем равенстве $\vec{j}_E^{\,p} = -i\omega(\hat{\varepsilon}(x) - \varepsilon_0\,\hat{I})\vec{E}$ – электрический ток поляризации.

При самых общих предположениях о диэлектрических и магнитых свойствах рассеивающего тела Q решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие условиям (2), (3), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= i\omega\mu_0\vec{A}_E - \frac{1}{i\omega\,\varepsilon_0} grad\ div\ \vec{A}_E - rot\ \vec{A}_H\ ,\\ \vec{H} &= i\omega\,\varepsilon_0\,\vec{A}_H - \frac{1}{i\omega\mu_0} grad\ div\ \vec{A}_H + rot\ \vec{A}_E\ ,\end{aligned} \tag{5}$$

здесь

$$\begin{aligned}\vec{A}_E &= \int\limits_Q \hat{G}_E(r)\vec{j}_E(y)dy\ ,\\ \vec{A}_H &= \int\limits_Q \hat{G}_H(r)\vec{j}_H(y)dy\end{aligned} \tag{6}$$

– векторные потенциалы электрических и магнитных токов, $\hat{G}_E$, $\hat{G}_H$ – функции Грина прямоугольного резонатора для уравнения Гельмгольца.

Из соотношений (4)–(6) и условия $\hat{\mu} = \mu_0\hat{I}$ для полей $\vec{E}$, $\vec{H}$ следуют два интегро-дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}&\vec{E}(x) - k_0^2\int\limits_Q \hat{G}_E\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)dy-\\ &-grad\ div\int\limits_Q \hat{G}_E\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)dy = \vec{E}^{\,0}(x)\ ,\\ &\vec{H}(x) + i\omega\,\varepsilon_o\,rot\int\limits_Q \hat{G}_E\left[\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)dy = \vec{H}^{\,0}(x).\end{aligned} \tag{7}$$

2. Тензорная функция Грина прямоугольного резонатора

Одним из ключевых моментов в исследовании уравнений (7) является изучение свойств тензора $\hat{G}_E$ (в силу условия $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}$ в Q исследовать $\hat{G}_H$ нет необходимости).

Компоненты функции Грина являются решением уравнения Гельмгольца внутри прямоугольного резонатора (это справедливо для любой ограниченной области) и обеспечивают обращение в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на стенках резонатора.

В [3] показано, что при произвольном распределении источников тензор $\hat{G}_E$ – диагональный, а его компоненты имеют вид

$$G_E^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\,\varepsilon_n}{ab\gamma \operatorname{sh}\gamma c} \cos\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \times \begin{cases} \operatorname{sh}\gamma x_3 \operatorname{sh}\gamma(c - y_3), & x_3 < y_3 \\ \operatorname{sh}\gamma y_3 \operatorname{sh}\gamma(c - x_3), & x_3 > y_3 \end{cases}$$

$$G_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\,\varepsilon_m}{ab\gamma \operatorname{sh}\gamma c} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \cos\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \times \begin{cases} \operatorname{sh}\gamma x_3 \operatorname{sh}\gamma(c - y_3), & x_3 < y_3 \\ \operatorname{sh}\gamma y_3 \operatorname{sh}\gamma(c - x_3), & x_3 > y_3 \end{cases} \tag{8}$$

$$G_E^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{ab\gamma \operatorname{sh}\gamma c} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \times \begin{cases} \operatorname{ch}\gamma x_3 \operatorname{ch}\gamma(c - y_3), & x_3 < y_3 \\ \operatorname{ch}\gamma y_3 \operatorname{ch}\gamma(c - x_3), & x_3 > y_3 \end{cases}$$

В этих выражениях $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_n = \varepsilon_m = 2$ при $n, m = 1, 2, 3, \ldots$. Ветвь квадратного корня

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$$

выбирается так, чтобы при $Im\,k \geq 0$

$$(\xi^2 - k^2)^{-1/2} = \frac{\sqrt{|\xi^2 - k^2| + Re(\xi^2 - k^2)}}{\sqrt{2}|\xi^2 - k^2|} +$$

$$+ \frac{i\,sign(Re\,k)\sqrt{|\xi^2 - k^2| - Re(\xi^2 - k^2)}}{\sqrt{2}|\xi^2 - k^2|},$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ (см. [2], стр.55).

Ряды (8) сходятся, если $x_3 \neq y_3$. При $x_3 = y_3$ требуется провести дополнительное исследование.

Можно показать, что

$$G_E^i = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^i(x,y),$$

где функция g^i непрерывно дифференцируема в $\bar{P}$ (см. [2], стр. 130).

3. Интегральные уравнения задачи дифракции

Перейдем от интегро-дифференциальных уравнений (8) к объемным векторным сингулярным интегральным уравнениям.

Представим функцию Грина в виде

$$\hat{G}_E(r) = \hat{G}_0(r) + \hat{G}_1(r) + \hat{G}_2(r),$$
$$\hat{G}_0(r) = \frac{e^{ik_0 r} - 1}{4\pi r} \cdot \hat{I},\ \hat{G}_1(r) = \frac{1}{4\pi r} \cdot \hat{I},\ \hat{G}_2(r) = diag\{g_1, g_2, g_3\}.$$

Пусть x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 – координаты точек x, y. Рассмотрим второй интеграл в уравнении (7) для электрического поля и исследуем вопрос о возможности внесения операции $grad\ div$ под интегралы $\int\limits_Q \hat{G}^p(r)\vec{U}(y)dy \quad (p = 0, 1, 2)$.

В декартовой системе координат

$$\left(grad\ div \int_Q \hat{G}_E(r)\vec{U}(y)dy\right)_l =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \int_Q G_E^n(r) U_n(y) dy\right], \quad l = 1, 2, 3.$$

Для функции $\hat{G}_0$ можно внести вторую производную под знак интеграла, так как функция и ее первая производная имеют слабую особенность. Это верно и для $\hat{G}_2$ в силу гладкости компонент $g_k, \quad k = 1, 2, 3$.

Пусть R^m - m-мерное евклидово пространство, Q - область в этом пространстве и $\bar{Q}$ - замыкание Q. Сформулируем правило дифференцирования интегрального оператора, ядро которого имеет особенность порядка $1/r^{m-1}$.

Теорема 1. *Пусть функция $\psi(x, \alpha)$ имеет в Q непрерывные первые производные по декартовым координатам точек x и α, а $u \in L_2(Q)$. Тогда интеграл*

$$\omega(x) = \int_Q \frac{\psi(x, \alpha)}{r^{m-1}} u(y) dy$$

имеет обобщенные производные $\partial\omega/\partial x_k \in L_2(q), \quad k = 1, \ldots, m$. Эти производные определяются по формуле

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = v.p. \int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\psi(x, \alpha)}{r^{m-1}}\right] u(y) dy - u(x) \int_S \psi(x, \alpha) \cos(\xi_k) dS,$$

где ξ_k - угол между вектором $\vec{r}$, направленным от точки x к y, и ортом, который соответствует координате x_k.

Если в ограниченной области $\bar{Q}$ функция u непрерывна по Гельдеру с показателем λ, то производные $\dfrac{\partial \omega}{\partial x_k}$ непрерывны в Q.

Применяя данную теорему к сингулярному интегралу с ядром $\dfrac{\partial}{\partial x_n}\dfrac{1}{4\pi r}$, придем к известному (см. [4]) представлению

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\int\limits_Q \frac{\partial G_1(r)}{\partial x_n}U_n(y)dy = v.p.\int\limits_Q \frac{\partial^2 G_1(r)}{\partial x_l \partial x_n}U_n(y)dy - \frac{1}{3}\delta_{ln}U_n(x),$$

здесь δ_{ln} – символ Кронекера.

Используя полученные соотношения, перейдем от интегро-дифференциальных уравнений (7) к двум векторным сингулярным интегральным уравнениям

$$\vec{E}(x) + \frac{1}{3}\left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(x) - \int\limits_Q \hat{\Gamma}(x,y)\left\{\left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)\right\}dy -$$

$$-v.p.\int\limits_Q \hat{\Gamma}_1(x,y)\left\{\left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)\right\}dy -$$

$$-\int\limits_Q \hat{\Gamma}_2(x,y)\left\{\left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)\right\}dy = \vec{E}^0(x)$$

$$\vec{H}(x) + i\omega\varepsilon_0\int\limits_Q rot\ \left\{\hat{G}_E(x,y)\left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right]\vec{E}(y)\right\}dy = \vec{H}^0(x). \tag{9}$$

Здесь тензоры $\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2$ имеют вид:

$$\hat{\Gamma}(x,y)\vec{U}(y) = k_0^2\hat{G}_E(r)\vec{U}(y) + (\vec{U}(y), grad\ )grad\ G_0(r),$$

$$\hat{\Gamma}_1(x,y)\vec{U}(y) = (\vec{U}(y), grad\ )grad\ G_1(r),$$

$$(\hat{\Gamma}_2(x,y))_{ij} = \frac{\partial^2 g_j(r)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Уравнения (9) определяют поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ как внутри, так и вне тела неоднородности ($y \in \Pi/\bar{Q}$), причем в последнем случае все интегралы – собственные.

Для рассматриваемой задачи (1)–(3) введем понятие классического решения: решение дифференциальной задачи (1)–(3) называется *классическим*, если оно представимо в Q и $\Pi/\partial Q$ в виде суммы дифференцируемого поля и градиента непрерывно дифференцируемой функции, удовлетворяет уравнениям Максвелла (1), условиям сопряжения (2) и граничному условию (3).

Вопрос об эквивалентности дифференциальной и интегральной постановок задачи дифракции разрешается следующим образом ([4], стр. 69).

Теорема 2. *Пусть тело Q с регулярной границей ∂Q характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, компоненты которого – непрерывные по Гельдеру фукнции. Любое непрерывное по Гельдеру в Q решение интегральных уравнений (9) является классическим решением исходной задачи. Верно и обратное: любое решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее условиям (2), (3), является решением (9).*

4. Метод Галеркина

Для численного решения задачи дифракции необходимо провести ее дискретизацию. Одним из эффективных методов сведения интегральных уравнений к СЛАУ является метод Галеркина.

Для уравнения $Af = g$, $f, g \in X$ в гильбертовом пространстве X метод формулируется следующим образом: приближенное решение $f_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A f_n = P_n y$. Здесь $f_n \in X_n$ (X_n – n-мерное подпространство пространства X), $P_n : X \to X_n$ – оператор проецирования на конечномерное подпространство. Пусть подпространства X_n являются линейными оболочками базисных функций $X_n = span\{u_1, \ldots, u_n\}$. Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0. \tag{10}$$

Уравнение $P_n A f_n = P_n y$ эквивалентно следующему:

$$(Af_k, u_k)_X = (g, u_k)_X \ (k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

где $(\cdot, \cdot)_X$ – скалярное произведение в X. Представим приближенное решение в виде линейной комбинации $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k u_k$ базисных функций. Подставив это выражение в (11), получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов c_k

$$\sum_k c_k(Au_k, u_l)_X = (y, u_l)_X, \quad l = 1, \dots, n.$$

Приведем без доказательства следующие важные теоремы.

Теорема А. *Пусть U – нетривиальное подпространство гильбертова пространства X. Тогда оператор P, переводящий элемент $\phi \in X$ в элемент наилучшей аппроксимации в подпространстве U, есть проекционный оператор. Он называется ортопроектором на U и удовлетворяет условию $||P|| = 1$.*

Теорема Б. *Проекционный метод сходится тогда и только тогда, когда существует число N и положительная константа M такие, что для всех $n \geq N$ конечномерные операторы $A_n := P_n A : X_n \to Y_n$ обратимы и операторы $A_n^{-1} P_n A : X \to X$ равномерно ограничены*

$$||A_n^{-1} P_n A|| \leq M.$$

Теорема В. *Пусть $S : X \to Y$ – ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный, и проекционный метод сходится для S. Пусть K – компактный линейный ограниченнй оператор, а оператор $S - K$ инъективен. Тогда проекционный метод сходится и для оператора $S - K$.*

Вернемся теперь к вопросу о построении схемы Галеркина для рассматриваемой задачи дифракции. Будем формулировать метод не для сингулярного интегрального уравнения (9), а для интегро-дифференциального уравнения (7). Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления интегралов.

Обозначим

$$\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)^{-1} =: \hat{\xi}\,, \quad \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)\vec{E} =: \vec{J}$$

и перейдем от (7) к уравнению

$$A\vec{J} := \hat{\xi}\vec{J}(x) - k_0^2 \int\limits_Q \hat{G}_E \vec{J}(y)dy - grad\ div \int\limits_Q \hat{G}_E \vec{J}(y)dy = \vec{E}_0(x).$$

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int\limits_Q G_E^l(x,y) J^l(y)dy -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_l} div_x \int\limits_Q \hat{G}(x,y)\vec{J}(y)dy = E_0^l(x), \quad l = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Определим компоненты приближенного решения $\vec{\bar{J}}$ следующим образом:

$$\bar{J}^1 = \sum_{k=1}^{N} a_k f_k^1(x), \quad \bar{J}^2 = \sum_{k=1}^{N} b_k f_k^2(x), \quad \bar{J}^3 = \sum_{k=1}^{N} c_k f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции-"крышки", существенно зависящие лишь от переменной x^i.

Построим функции f_k^1. Будем считать, что Q – параллелепипед $Q = \{x : a_1 \le x^1 \le a_2, b_1 \le x^2 \le b_2, c_1 \le x^3 \le c_2\}$, $Q \subset \Pi$. Покроем Q маленькими параллелепипедами

$$\Pi_{klm}^1 = \{x : x_{k-1}^1 \le x^1 \le x_{k+1}^1, x_l^2 \le x^2 \le x_{l+1}^2, x_m^3 \le x^3 \le x_{m+1}^3\}$$

$$x_k^1 = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}k,\ x_l^2 = b_1 + 2\frac{b_2 - b_1}{n}l,\ x_m^3 = c_1 + 2\frac{c_2 - c_1}{n}m;$$

где $k = 1, \ldots, n-1$; $\quad l, m = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$.

Пусть

$$f_{klm}^1 = \begin{cases} \dfrac{x^1 - x_{k-1}^1}{x_k^1 - x_{k-1}^1}, & \text{если } x^1 \in [x_{k-1}^1; x_k^1] \text{ и } x \in \Pi_{klm}^1 \\[2ex] \dfrac{x_{k+1}^1 - x^1}{x_{k+1}^1 - x_k^1}, & \text{если } x^1 \in [x_k^1; x_{k+1}^1] \text{ и } x \in \Pi_{klm}^1 \\[2ex] 0, & \text{если } x \notin \Pi_{klm}^1 \end{cases}$$

или

$$f^1_{klm} = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x^1 - x^1_k|}{x_k - x_{k-1}}, \text{ если} if\ x \in \Pi^1_{klm} \\ \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{если } x \notin \Pi^1_{klm} \end{cases} .$$

Функции f^2_{klm}, f^3_{klm}, зависящие от переменных x_2 и x_3 соответственно, определяются по аналогичным формулам. Так как

$$f^1_{klm}|_{x^1 \in \{x^1_{k-1}, x^1_{k+1}\}} = 0,$$

$$f^2_{klm}|_{x^2 \in \{x^2_{l-1}, x^2_{l+1}\}} = 0, \tag{13}$$

$$f^3_{klm}|_{x^3 \in \{x^3_{m-1}, x^3_{m+1}\}} = 0\ ,$$

то каждая компонента вектора приближенного решения обращается в нуль на одной из граней Q. Тем не менее, верно следующее

Утверждение. *Построенное множество базисных функций удовлетворяет условию аппроксимации (10) в* L_2.

Утверждение следует из того, что каждая из систем f^i_{klm} базисных функций сколь угодно точно аппроксимирует кусочно-постоянные функции, система которых полна в $L_2(Q)$.

Введем сквозную нумерацию для фукнций f^i_k :

$$f^1_k, f^2_k, f^3_k; \quad k = 1, \ldots, N,$$

здесь $N = \frac{1}{4}(n^3 - n^2)$.

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k удобно представить в блочной форме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_1 \end{array} \right),$$

элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений

$$B^i_k = (E^k_0, f^k_i),$$

$$
\begin{aligned}
A_{kl}^{ij} = (\xi_{kl} f_j^l, f_i^k) - \delta_{kl} k_0^2 \Bigl(\int\limits_Q G_E^k(x,y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \Bigr) - \\
- \Bigl(\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^k(x,y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \Bigr),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$k = 1,2,3$; $\quad i = 1,\ldots,N$. Здесь $(f,g) = \int\limits_Q f(x) g(x) dx$ – скалярное произведение в L_2.

Преобразуем второе скалярное произведение в (14). Применяя к внешнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$
\Bigl(\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^k(x,y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \Bigr) =
$$

$$
= -\Bigl(\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^k(x,y) f_j^l(y) dy, \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) \Bigr).
$$

Поверхностные интегралы отсутствуют в силу условия (13).

Введем вспомогательную функцию

$$
\tilde{G}(x,y) =
$$

$$
= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{ab\gamma \mathrm{sh}\gamma c} \sin(\frac{\pi n}{a} x_1) \sin(\frac{\pi m}{b} x_2) \sin(\frac{\pi n}{a} y_1) \sin(\frac{\pi m}{b} y_2)
$$

$$
\times \begin{cases} \mathrm{sh}\gamma x_3 \ \mathrm{sh}\gamma(c - y_3), \ x_3 < y_3 \\ \mathrm{sh}\gamma y_3 \ \mathrm{sh}\gamma(c - x_3), \ x_3 > y_3 \end{cases}.
$$

Производные функции $\tilde{G}$ связаны с производными компонент тензорной функции Грина G_E^i формулами

$$
\frac{\partial G_E^i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_i}, \quad i = 1,2,3\,.
$$

Использовав последние соотношения и применив ко внутреннему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$A_{kl}^{ij} = (\xi_{kl} f_j^l, f_i^k) - \delta_{kl} k_0^2 \left(\int\limits_Q G_E^k(x,y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right) -$$

$$- \left(\int\limits_Q \tilde{G}(x,y) \frac{\partial}{\partial x_l} f_j^l(y) dy, \frac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) \right),$$

или, записав явно скалярные произведения по носителям базисных функций,

$$A_{kl}^{ij} = \int\limits_{\Pi_j^l \cap \Pi_i^k} \xi_{kl} f_j^l(x) f_i^k(x) dx -$$

$$-\delta_{kl} k_0^2 \int\limits_{\Pi_i^k} \int\limits_{\Pi_j^l} G_E^k(x,y) f_j^l(y) f_i^k(x) dy dx -$$

$$- \int\limits_{\Pi_i^k} \int\limits_{\Pi_j^l} \tilde{G}(x,y) \tfrac{\partial}{\partial x_l} f_j^l(y) \tfrac{\partial}{\partial x_k} f_i^k(x) dy dx.$$

Исследуем вопрос о сходимости метода Галеркина для уравнения (12). Для этого представим оператор в левой части уравнения в виде

$$A = S - K,$$

где S - сингулярный интегральный оператор, действующий по формуле

$$S\vec{E}(x) = \vec{E}(x) + \frac{1}{3} \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \vec{E}(x) -$$

$$- \int\limits_Q \hat{\Gamma}(x,y) \left\{ \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \vec{E}(y) \right\} dy -$$

$$- v.p. \int\limits_Q \hat{\Gamma}_1(x,y) \left\{ \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \vec{E}(y) \right\} dy\ ,$$

и

$$K\vec{E}(x) = \int\limits_Q \hat{\Gamma}_2(x,y) \left\{ \left[\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \vec{E}(y) \right\} dy\ .$$

Покажем, что метод Галеркина для оператора S сходится. Для этого воспользуемся доказанным в [4] утверждением.

Лемма. *Для оператора S верна оценка*

$$|(S\vec{v}, \vec{v})| \geq p_0(\vec{v}, \vec{v}) ,$$

где $p_0 > 0$, а $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Пусть X_n – конечномерные подпространства $L_2(Q)$, P_n – операторы ортогонального проектирования на X_n. Из утверждения леммы следует

Теорема 3. *Для оператора $S : L_2(Q) \to L_2(Q)$ метод Галеркина сходится.*

Заметим теперь, что оператор $K : L_2(Q) \to L_2(Q)$ компактен – это следует из гладкости ядра $\Gamma_2(x, y)$. Таким образом, верна

Теорема 4. *Для интегрального оператора $S - K$, действующего в пространстве $L_2(Q)$, метод Галеркина сходится, если оператор $S - K$ инъективен.*

Литература

[1] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.

[2] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М.: ИПРЖР, 1996.

[3] Марков Г.Т., Панченко Б.А. Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов // Изв. вузов. Радиотехн. – 1964. – Т. 7, Вып. 1. – С. 34–41.

[4] Самохин А.Б.. Интегральные уравнения и итерационные методы в электроманитном рассеянии. – М.: Радио и связь, 1998.