О НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДАХ С ЗАПОЛНЕНИЕМ СРЕДЫ ПО ЗАКОНУ КЕРРА [1]

С.Н. Куприянова (Пенза)

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть все трехмерное пространство R^3 заполнено изотропной средой без источников с $\varepsilon_1 = const$. В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод неоднородного заполнения с образующей, параллельной оси Oz. Обозначим внутреннюю область поперечного сечения с границей C через S_2, внешнюю – через S_1. Пусть ε_2 внутри цилиндра определяется по закону Керра

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f + a_f|\mathbf{E}|^2,$$

где a_f и ε_f – вещественные положительные константы. Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода то есть его собственные волны.

Задача 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{E}=\{0; E_\varphi; 0\}$, $\mathbf{H}=\{H_\rho; 0; H_z\}$.

Электромагнитное поле **E**,**H** удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon\boldsymbol{E},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H},$$

а также условию непрерывности касательных составляющих на границе раздела двух сред и условиям на бесконечности.

Перейдем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, z). Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-00053

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi} = i\omega\mu H_z, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -i\omega\varepsilon E_\rho, \tag{4}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\varepsilon E_\varphi, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi} = -i\omega\varepsilon E_z. \tag{6}$$

С учетом того, что $\mathbf{E}=\{0; E_\varphi; 0\}$, $\mathbf{H}=\{H_\rho; 0; H_z\}$. уравнения (1)—(6) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho \tag{7}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\varphi) = i\omega\mu H_z \tag{8}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\varepsilon E_\varphi \tag{10}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi} = 0 \tag{11}$$

Из (9) и (11) находим, что $H_z = H_z(\rho, z)$ и $H_\rho = H_\rho(\rho, z)$ не зависят от φ. Из (7) и (8) имеем

$$H_\rho = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, H_z = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\varphi).$$

Тогда (10) после подстановки H_ρ, H_z дает

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\varphi)) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \omega^2\varepsilon\mu E_\varphi = 0.$$

Будем искать гармонически зависящее от z-координаты решение задачи $E_\varphi(\rho, z) = u(\rho)e^{i\gamma z}$. Тогда

$$(\frac{1}{\rho}(\rho u)')' + (\omega^2\varepsilon\mu - \gamma^2)u = 0. \tag{12}$$

В области S_1, учитывая что $\varepsilon = \varepsilon_1$, получаем для вещественных γ

$$(\frac{1}{\rho}(\rho u)')' + \widehat{k}_1^2 u = 0,$$

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u + \widehat{k}_1^2 u = 0,$$

здесь

$$\widehat{k}_1^2 := \omega^2\varepsilon_1\mu - \gamma^2.$$

В области S_2, подставляя в (12) $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_f + a_f|\mathbf{E}|^2$, получим для вещественных γ :

$$(\frac{1}{\rho}(\rho u)')' + \widehat{k}_f^2 u + a|u|^2 u = 0,$$

где

$$a = \omega^2 a_f\mu, \widehat{k}_f^2 = \omega^2\varepsilon_f\mu - \gamma^2.$$

Иначе,

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u + \widehat{k}_f^2 u + a|u|^2 u = 0.$$

Если $u(\rho)$—вещественная функция, то

$$u'' + \frac{1}{\rho}u' - \frac{1}{\rho^2}u + \widehat{k}_f^2 u + au^3 = 0.$$

Из условий сопряжения $[E_\varphi]_{\rho=R} = 0$, $[H_z]_{\rho=R} = 0$ следует, что

$$[u]_{\rho=R} = 0, [(u)']_{\rho=R} = 0.$$

В рассматриваемом случае γ – спектральный параметр.

Задача 2. Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{E}=\{0; 0; E_z\}$, $\mathbf{H}=\{H_\rho\ ;\ H_\varphi; 0\}$.

Уравнения (1)—(6) принимают вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} = i\omega\mu H_\rho \tag{13}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi \tag{14}$$

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\omega\varepsilon E_z. \tag{17}$$

Из (15) и (16) находим, что $H_\rho = H_\rho(\rho,\varphi)$ и $H_\varphi = H_\varphi(\rho,\varphi)$ не зависят от z. Далее, из (13) и (14) следует, что

$$H_\rho = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, H_\varphi = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}$$

и из (17) –

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial E_z}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \omega^2\mu\varepsilon E_z = 0.$$

Решение задачи будем искать в виде $E_z(\rho,\varphi) = e^{in\varphi}v(\rho)$, где n – вещественное число. В области S_1, где $\varepsilon = \varepsilon_1$,

$$v'' + \frac{1}{\rho}v' + (k_1^2 - \frac{n^2}{\rho^2})v = 0.$$

Здесь $k_1^2 = \omega^2\varepsilon_1\mu$, а n – спектральный параметр. В области S_2, где $\varepsilon = \varepsilon_2$,

$$v'' + \frac{1}{\rho}v' + (k_f^2 - \frac{n^2}{\rho^2})v + av^3 = 0,$$

если $v(\rho)$ – вещественная функция. Здесь $k_f^2 = \omega^2\varepsilon_f\mu$, $a = \omega^2 a_f\mu$. Из условий сопряжения $[E_z]_{\rho=R} = 0$, $[H_\varphi]_{\rho=R} = 0$ следует, что $[v]_{\rho=R} = 0$, $[v']_{\rho=R} = 0$.

Легко видеть, оба случая сводятся к уравнениям

$$y'' + \frac{y'}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}y + \kappa^2 y = 0,$$

$$y'' + \frac{y'}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}y + \kappa^2 y + ay^3 = 0,$$

где $y = u$, $\kappa = \widehat{k}$, $n = 1$ для первой задачи и $y = v$, $\kappa = k$ для второй задачи. Линейное уравнение является уравнением Бесселя. Если принять во внимание условия излучения, то его решение

$$y = C_1 H_n^{(1)}(\kappa\rho), \tag{18}$$

где C_1 - константа и $H_n^{(1)}$ - функция Ханкеля. Если действительная часть κ равна 0, то

$$y = C_1 K_n(|\kappa|\rho), \tag{19}$$

где K_n действительная функция Макдональда. Следует учесть, что $K_n(|\kappa|\rho) \to 0$ экспоненциально при $\rho \to \infty$, и выполняются условия излучения.

2. Нелинейное интегральное уравнение

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$(\rho u')' + (k^2\rho - \frac{n^2}{\rho})u + a\rho u^3 = 0 \tag{20}$$

и линейное уравнение

$$\rho u'' + u' + (k^2\rho - \frac{n^2}{\rho})u = 0, \tag{21}$$

то есть

$$Lu = 0, \quad L := \rho\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + (k^2\rho - \frac{n^2}{\rho}).$$

Функция

$$G(\rho, \rho_0) := \frac{\pi}{2}\frac{J_n(k\rho_0)}{J_n'(kR)}(J_n(k\rho)N_n'(kR) - J_n'(kR)N_n(k\rho)),\ \rho_0 < \rho \le R$$

представляет собой функцию Грина для граничной задачи

$$LG = -\delta(\rho - \rho_0),$$

$$G|_{\rho=0} = G'|_{\rho=R} = 0;\ n > 0\ (0 < \rho_0 < R).$$

В дальнейшем нам понадобится также вторая формула Грина

$$\int_0^R (vLu - uLv)d\rho = \int_0^R (v(\rho u')' - u(\rho v')')d\rho =$$

$$= R(u'(R)v(R) - v'(R)u(R)) \qquad (22)$$

Уравнение (20) перепишем в виде

$$Lu + aB(u) = 0, B(u) = \rho u^3. \qquad (23)$$

Используя (22), получим ($v := G$)

$$\int_0^R (GLu - uLG)d\rho = R(u'(R-0)G(R,\rho_0) - G'(R,\rho_0)u(R-0)) =$$

$$= Ru'(R-0)G(R,\rho_0)$$

или

$$\int_0^R (GLu - uLG)d\rho = -a\int_0^R GB(u)d\rho + u(\rho_0).$$

Таким образом, мы пришли к уравнению

$$u(\rho_0) = a\int_0^R G(\rho,\rho_0)\rho u^3(\rho)d\rho + Ru'(R-0)G(R,\rho_0), \ \rho_0 < R. \qquad (24)$$

и условиям сопряжения

$$u(R+0) = a\int_0^R G(\rho,R)\rho u^3(\rho)d\rho + Ru'(R+0)G(R,R) \qquad (25)$$

(так как u(R-0)=u(R+0),u'(R-0)=u'(R+0)).

Пусть

$$f := Ru'(R+0)G(R,\rho_0),$$

$$N(\rho,\rho_0) := G(\rho,\rho_0)\rho,$$

$$G(R,\rho_0) := \frac{1}{kR}\frac{J_n(k\rho_0)}{J_n'(kR)}.$$

Рассмотрим в пространстве C[0,R] интегральное уравнение

$$u(\rho_0) = \int_0^R N(\rho,\rho_0)u^3(\rho_0)\,d\rho + f(\rho_0). \qquad (26)$$

Будем предполагать, что $f \in C[0,R]$, а ядро $N(\rho,\rho_0)$ непрерывно в квадрате $0 \le \rho,\ \rho_0 \le R$. Линейный интегральный оператор

$$N\omega = \int_0^R N(\rho,\rho_0)\omega(\rho_0)\,d\rho. \qquad (27)$$

ограничен в C[0,R], вполне непрерывен и

$$||N|| = max \int_0^R |N(\rho, \rho_0)|\, d\rho. \tag{28}$$

Поскольку нелинейный оператор $u^3(\rho)$ ограничен и непрерывен в C[0,R], то нелинейный оператор

$$F(u) = \int_0^R N(\rho, \rho_0) u^3(\rho)\, d\rho + f(\rho_0) \tag{29}$$

является вполне непрерывным оператором на каждом ограниченном в C[0,R] множестве.

В последующих рассуждениях нам понадобится следующее вспомогательное числовое кубическое уравнение:

$$||N|| r^3 + ||f|| = r, \tag{30}$$

где $||N||$ определяется формулой (28), а $||f|| = max|f(\rho_0)|$.

Справедливо следующее утверждение (см. [1], стр.415).

Теорема 1. *Если выполняется неравенство*

$$0 \leq ||f|| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3||N||}}, \tag{31}$$

то уравнение (30) имеет два неотрицательных корня r_* *и* r^*, $r_* < r^*$. *При этом, если* $||f|| = 0$, *то* $r_* = 0$ *и* $r^* = \frac{1}{\sqrt{||N||}}$. *Далее, при* $0 < ||f|| < \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3||N||}}$

$$r_* < \frac{1}{\sqrt{3||N||}} \tag{32}$$

и при $||f|| = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3||N||}}$ *решения сливаются:*

$$r_* = r^* = \frac{1}{\sqrt{3||N||}}.$$

Докажем теперь с помощью принципа Шаудера, что при каждом $f \in S_{\hat{\rho}}(0) \subset C[0, R]$, где $\hat{\rho} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3||N||}}$, существует решение

$u(\rho)$ интегрального уравнения (26) в шаре $S^* = S_{r^*}(0)$. Поскольку уже установлено, что оператор $F(u)$ вполне непрерывен, осталось проверить, что он переводит шар S^* в себя.

Пусть $u \in S^*$, тогда из (29), (27), (28) следует, что

$$||F(u)|| \leq ||N||||u||^3 + ||f|| \leq ||N||(r^*)^3 + ||f|| = r^*.$$

Это значит, что $FS^* \subset S^*$, и, следовательно, при каждом f, удовлетворяющим условию с $||f|| =\leq \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3||N||}}$, уравнение (26) имеет по крайней мере одно решение, причем $||f|| \leq r^*$.

Покажем теперь, что если выполнено условие (31), то уравнение (26) имеет единственное решение в шаре $S_* = S_{r_*}$. Действительно, если $u \in S_*$, то

$$||F(u)|| \leq ||N||||u^3|| + ||f|| \leq ||N||r_*^3 + ||f|| = r_*.$$

По теореме Шаудера уравнение (26) имеет хотя бы одно решение, если $f \in S_\rho(0)$. Далее, при $u_1, u_2 \in S_*$ имеем

$$||F(u_1) - F(u_2)|| = ||\int_R^0 N(\rho, \rho_0)(u_1^3(\rho) - u_2^3(\rho)d\rho|| \leq 3Nr_*^2||u_1 - u_2||.$$

Если $f(\rho_0)$ удовлетворяет условию (31), то выполняется неравенство (32), откуда следует $3Nr_*^2 < 1$.

Следовательно, при ограничении (31) F отображает S_* в себя и является на S^* сжимающим оператором, а потому уравнение (26) имеет при ограничении (31) единственное решение в S_*.

Теперь можно сформулировать следующий важный результат (см.[2], стр.633).

Теорема 2. *Если существует такое $A > 0$, не зависящее от a, что*

$$a \leq A,$$

$$A := \frac{2}{3}\frac{1}{||f||\sqrt{3||N_0||}},$$

$$||N_0|| = \max_{\rho_0 \in [0,R]} \int_0^R |\rho G(\rho, \rho_0)|\, d\rho б$$

то уравнение (23) имеет единственное решение, являющееся непрерывной функцией.

Последовательность приближенных решений

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = a \int_0^R G(\rho, \rho_0)\rho \frac{u_n^3}{1 + bu_n^2} d\rho + f,$$

уравнения (23) равномерно сходится к его точному решению u.

3. Дисперсионное уравнение и решение типа солитона

Пусть

$$k_1 = \sqrt{\mu\omega^2(\gamma^2 - \varepsilon_1)}, \quad k_f = \sqrt{\mu\omega^2(\varepsilon_f - \gamma^2)}.$$

Из уравнений (25) и (19) следует, что

$$C_1 K_1(|k|R) - C_1 K_1'(|k|R)|k|RG(R, R) = a \int_0^R G(\rho, R)\rho u^3(\rho) d\rho$$

то есть

$$g(\gamma) = aF(\gamma),$$

где

$$g(\gamma) = C_1 K_1(|k|R) - C_1 K_1'(|k|R)|k|RG(R, R), \tag{33}$$

$$F(\gamma) = \int_0^R G(\rho, R)\rho u^3(\rho) d\rho.$$

Теорема 3. *Существуют ε_1, ε_f $(\varepsilon_f > \varepsilon_1)$, $a > 0$ и собственное значение γ_0, удовлетворяющее условию $\omega^2\varepsilon_1\mu < \gamma_0^2 < \omega^2\varepsilon_f\mu$, такие, что первая задача имеет нетривиальное решение типа солитона.*

Для доказательства теоремы достаточно проверить, имеет ли уравнение $g(\gamma) - aF(\gamma) = 0$ корень на отрезке $[\varepsilon_1, \varepsilon_f]$.

Из определения функции $g(\gamma)$ (33) и свойств цилиндрических функций следует, что

$$K_1'(|k|R) = -|k|RK_0(|k|R) - K_1(|k|R),$$

и, следовательно,

$$g(\gamma) = C_1 K_1(|k|R)(1 - G(R,R)) + C_1 K_0(|k|R)|k|R,$$

где

$$K_0(k_1 R) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_1 R/2)^{2m}}{(m!)^2} \ln \frac{C k_1 R}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_1 R/2)^{2m}}{(m!)^2} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}, \tag{34}$$

$$K_1(k_1 R) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_1 R/2)^{2m+1}}{m!(m+1)!} \ln \frac{C k_1 R}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k_1 R/2)^{2m+1}}{m!(m+1)!} (\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i}) + \frac{1}{k_1 R}, \tag{35}$$

$C = 0,57721566490\ldots$ — постоянная Эйлера,

$$G(R,R) = \frac{1}{k_f R} \frac{J_1(k_f R)}{J_1'(k_f R)}.$$

Далее, принимая во внимание свойства цилиндрических функций, получаем

$$G(R,R) = \frac{J_1(k_f R)}{-J_1(k_f R) + k_f R J_0(k_f R)},$$

где

$$J_0(k_f R) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(k_f R)^{2m}}{2^{2m}(m!)^2},$$

$$J_1(k_f R) = \frac{k_f R}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(k_f R)^{2m}}{2^{2m} m!(m+1)!}.$$

Если $\gamma^2 \longrightarrow \varepsilon_1 \mu \omega^2$, то, в соответствии с (34) и (35),

$$K_1(k_1 R) \longrightarrow \infty,$$

$$k_1 R * K_0(k_1 R) \longrightarrow 0,$$

$$G(R,R) = const.$$

Таким образом, $g(\gamma) \longrightarrow -\infty$, если $\gamma^2 \longrightarrow \varepsilon_1\mu\omega^2$ при условии

$$1 + G(R, R) < 0,$$

что означает

$$1 + \frac{J_1(R\sqrt{\mu\omega^2(\varepsilon_f - \varepsilon_1)}}{\sqrt{\mu\omega^2(\varepsilon_f - \varepsilon_1)}} < 0.$$

Если $\gamma^2 \longrightarrow \varepsilon_f\mu\omega^2$, то

$$1 + G(R, R) \longrightarrow 2,$$

$$K_1(k_f R) = const,$$

$$K_0(k_f R) = const.$$

Легко видеть, что K_0 и K_1 – положительные функции на всей области определения, тогда $g(\varepsilon_f\mu\omega^2) - aF(\varepsilon_f\mu\omega^2)$ равно некоторому положительному числу. Учитывая, что функция $g(\gamma) - aF(\gamma)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке, приходим к выводу, что функция имеет корень, принадлежащий $[\varepsilon_1; \varepsilon_f]$. Теорема доказана.

Литература

[1] Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980.

[2] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984.

[3] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Факториал, 1997.