СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ДЕФЕКТАМИ

А.А. Гусенкова (Казань)

Метод комплексных потенциалов с логарифмической особенностью в ядре, представленной интегралом типа Коши с переменным пределом, был рассмотрен ранее при решении двумерных статических задач линейной теории упругости для тел с дефектами в [1], [2]. В настоящей работе аналогично исследованы некоторые двумерные статические задачи нелинейной теории упругости для тел с дефектами, рассмотренные в [3], [4].

1. Постановка задачи. Пусть гладкий контур L ограничивает односвязную область D, заполненную упругим телом. Тогда в случае обобщенной антиплоской деформации при отсутствии объемных сил имеем [3]

уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}[\Omega(\zeta,\overline{\zeta})(\frac{\partial\Phi}{\partial I_C}+\lambda^2\frac{\partial\Phi}{\partial II_C})]+\overline{\frac{\partial}{\partial\zeta}[\Omega(\zeta,\overline{\zeta})(\frac{\partial\Phi}{\partial I_C}+\lambda^2\frac{\partial\Phi}{\partial II_C})]}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}[4\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial I_C}+2\lambda(2\lambda^2+2\lambda^{-4}\Omega(\zeta,\overline{\zeta})\overline{\Omega(\zeta,\overline{\zeta})})\frac{\partial\Phi}{\partial II_C}+4\lambda^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial III_C}]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\zeta}[2\lambda\Omega^2(\zeta,\overline{\zeta})\frac{\partial\Phi}{\partial II_C}]=0; \tag{1}$$

силовые (статические) граничные условия

$$2\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial I_C}+\lambda(2\lambda^2+2\lambda^{-4}+\Omega(t,\overline{t})\overline{\Omega(t,\overline{t})})\frac{\partial\Phi}{\partial II_C}+2\lambda^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial III_C}-$$

$$-\lambda\Omega^2(t,\overline{t})\frac{\partial\Phi}{\partial II_C}e^{-i2\gamma^0}=\sigma_{\nu^0\nu^0}(s^0)+i\sigma_{\nu^0t^0}(s^0),$$

$$(\frac{\partial\Phi}{\partial I_C}+\lambda^2\frac{\partial\Phi}{\partial II_C})(\overline{\Omega(t,\overline{t})}e^{i\gamma^0}+\Omega(t,\overline{t})e^{-i\gamma^0})=\sigma_{\nu^0_3}(s^0), \tag{2}$$

$$t\in L,\quad s^0\in[0,l];$$

деформационное граничное условие

$$\overline{\Omega(t,\bar t)}e^{i\gamma^0} - \Omega(t,\bar t)e^{-i\gamma^0} = -i2\frac{dx_3(s^0)}{ds^0},\ t \in L,\ s^0 \in [0,l], \qquad (3)$$

где $\Omega(\zeta,\bar\zeta) = 2\frac{\partial w}{\partial\bar\zeta}(\zeta,\bar\zeta)$ – разрешающая функция, $\zeta = x_1^0 + ix_2^0$, $z = x_1 + ix_2$ – комплексные координаты, переменной ζ на границе области соответствует переменная t, $x_1 = \lambda x_1^0$, $x_2 = \lambda x_2^0$, $x_3 = \lambda^{-2}x_3^0 + w(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0)$, x_i и x_i^0, $i = \overline{1,3}$ – пространственные и материальные координаты точки, $w(\cdot,\cdot)$ – прогиб, λ – кратность удлинения в направлении осей x_1, x_2, $\Phi = \Phi(I_C, II_C, III_C)$ – плотность энергии деформации (упругий потенциал), I_C, II_C, III_C – инварианты тензора деформации Коши–Эйлера C, $\sigma_{\nu^0\nu^0}(\cdot)$, $\sigma_{\nu^0t^0}(\cdot)$, $\sigma_{\nu_3^0}(\cdot)$ – компоненты тензора истинных напряжений Коши (тензора напряжений) Σ, γ^0 – угол между осью x_1^0 и внешней нормалью ν^0 к контуру L, контур L задан параметрическим уравнением

$$t = t(s^0) = x_1^0(s^0) + ix_2^0(s^0),\ t \in L,\ s^0 \in [0,l],$$

где параметр s^0 есть длина дуги контура, отсчитываемая от некоторой начальной точки $t_0 = t(0)$. В подынтегральных выражениях вместо функции $t(s^0)$ используется функция $\tau(\sigma^0)$, если равенство интегрируется по переменной s^0 от точки $t_0 = t(0)$ до точки $t = t(s^0)$.

При обобщенной антиплоской деформации в случае несжимаемого материала $\partial\Phi/\partial III_C = p/2$, краевые задачи для разрешающей функции $\Omega(\cdot,\cdot)$ однозначно разрешимы и сводятся к двум подзадачам для вещественной функции p и аналитической функции $\psi(\cdot)$ переменной ζ, по которым определяются комплексные компоненты тензора напряжений Σ.

В случае обобщенной плоской деформации при отсутствии объемных сил имеем [3]

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1}{\partial\bar\zeta}(\zeta,\bar\zeta) + \frac{\partial\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2}{\partial\zeta}(\zeta,\bar\zeta) = 0; \qquad (4)$$

силовое (статическое) граничное условие

$$\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_1(t,\bar t)+\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}_2(t,\bar t)e^{-i2\gamma^0}=$$

$$=2e^{-i2\gamma^0}[\sigma_{\nu_1^0}(s^0)+i\sigma_{\nu_2^0}(s^0)],\ t\in L,\ s^0\in[0,l]; \tag{5}$$

деформационное граничное условие

$$\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial \bar t}e^{-i2\gamma^0}=-ie^{-i\gamma^0}\frac{dz(s^0)}{ds^0},\ t\in L,\ s^0\in[0,l] \tag{6}$$

или *геометрическое*

$$z=z(s^0),\ t\in L,\ s^0\in[0,l], \tag{7}$$

где F – градиент движения, J – кратность изменения объема, $\{F^{-1}\cdot J\Sigma\}$ – номинальный тензор напряжений, $x_1=x_1(x_1^0,x_2^0)$, $x_2=x_2(x_1^0,x_2^0)$, $x_3=\lambda x_3^0$, λ – кратность удлинения в направлении оси x_3, $z=\zeta+u_1+iu_2$, $x_3=x_3^0+u_3$, u_i, $i=\overline{1,3}$ – компоненты вектора перемещений, $\sigma_{\nu_i^0}(\cdot)$, $i=1,2$ – компоненты тензора напряжений Σ.

При обобщенной плоской деформации искомые физические величины – напряжения и перемещения – могут быть найдены из уравнений равновесия (4) и одного из граничных условий (5), (6) и (7).

2. Обобщенная антиплоская деформация. Рассмотрим однородную изотропную упругую плоскость с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab.

Можно показать, что при обобщенной антиплоской деформации в случае несжимаемого материала $\overline{\psi'(\zeta)}=k_\beta\Omega(\zeta,\bar\zeta)$, где $k_\beta=1$ для неогуковского материала $(\Phi=\mu(I_C-3)/2)$, $k_\beta=2/\mu d\Phi/dI_C$ для обобщенного неогуковского материала $(\Phi=\Phi(I_C))$, $k_\beta=\partial\Phi/\partial I_C+\lambda^2\partial\Phi/\partial II_C$, если $\Phi=\Phi(I_C,II_C)$. Граничные условия для определения аналитической функции $\psi(\cdot)$ переменной ζ могут быть получены интегрированием второго из условий (2) и условия (3)

$$\operatorname{Im}\psi^{\pm}(t)=\int\limits_{at}\alpha^{\pm}(\tau)d\tau+A,\ t\in ab, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\psi^{\pm}(t)=\int\limits_{at}\beta^{\pm}(\tau)d\tau+B,\ t\in ab, \qquad (9)$$

где

$$\int\limits_{at}\alpha^{\pm}(\tau)d\tau=\frac{1}{k_{\alpha}}\int\limits_{0}^{s^0}\sigma^{\pm}_{\nu_3^0}(\sigma^0)d\sigma^0,\ t\in ab,\ s^0\in[0,l],\quad A=\operatorname{Im}\psi^{\pm}(a),$$

$k_{\alpha}=\mu$ для неогуковского и обобщенного неогуковского материалов, $k_{\alpha}=2$, если $\Phi=\Phi(I_C,II_C)$,

$$\int\limits_{at}\beta^{\pm}(\tau)d\tau=k_{\beta}x_3^{\pm}(s^0),\ t\in ab,\ ;s^0\in[0,l],\ B=\operatorname{Re}\psi^{\pm}(a)-k_{\beta}x_3^{\pm}(0).$$

Здесь предполагается, что $\psi^{+}(a)=\psi^{-}(a)$.

Легко получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Если предельные значения аналитической в разрезанной по дуге ab плоскости ζ функции $\psi(\cdot)$ удовлетворяют условиям (8), (9), то*

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\gamma(\tau)\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}d\tau+C,$$

где $\gamma(\tau)=\beta^{+}(\tau)-\beta^{-}(\tau)+i(\alpha^{+}(\tau)-\alpha^{-}(\tau))$, $\tau\in ab$, C - произвольная комплексная постоянная при условии ограниченности напряжений на бесконечности.

Аналитическую в области с разрезом функцию $\psi(\cdot)$, предельные значения которой удовлетворяют на дефекте ab условиям вида (8), (9), назовем *комплексным потенциалом* для однородного изотропного упругого тела с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab в случае обобщенной антиплоской деформации.

Можно показать, что при $\Phi=\Phi(I_C,II_C)$ вещественная функция p определяется равенством

$$p=-\frac{\lambda C_0}{2}-2\lambda^2\frac{\partial\Phi}{\partial I_C}-\lambda^2(2\lambda^2+2\lambda^{-4}+\Omega(\zeta,\overline{\zeta})\overline{\Omega(\zeta,\overline{\zeta})})\frac{\partial\Phi}{\partial II_C},\ (10)$$

где C_0 – некоторая вещественная постоянная.

Рассмотрим граничные задачи для плоскости ζ с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab. В случае первой и второй краевых задач для определения аналитической функции $\psi(\cdot)$ на дефекте заданы условия вида (8) и (9). В граничных задачах вещественная функция p может быть найдена после определения функции $\psi(\cdot)$.

Теорема 1. *Первая и вторая основные граничные задачи для упругой однородной изотропной плоскости с дефектом вдоль дуги ab эквивалентны интегральным уравнениям*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ab}[(\beta^+(\tau)-\beta^-(\tau))\,\mathrm{Re}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}-(\alpha^+(\tau)-\alpha^-(\tau))\,\mathrm{Im}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}]d\tau=$$

$$=-\int\limits_{at}(\alpha^+(\tau)+\alpha^-(\tau))d\tau-2A-i2\,\mathrm{Im}\,C,\ t\in ab,$$

где $\beta^+(\cdot)-\beta^-(\cdot)$ – искомая функция
(первая граничная задача),
и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{ab}[(\beta^+(\tau)-\beta^-(\tau))\,\mathrm{Im}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}+(\alpha^+(\tau)-\alpha^-(\tau))\,\mathrm{Re}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}]d\tau=$$

$$=\int\limits_{at}(\beta^+(\tau)+\beta^-(\tau))d\tau+2B-2\,\mathrm{Re}\,C,\ t\in ab,$$

где $\alpha^+(\cdot)-\alpha^-(\cdot)$ – искомая функция
(вторая граничная задача).

Рассмотрим граничные задачи для плоскости с отверстием, ограниченным гладким контуром L, и с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab. В краевых задачах для определения аналитической функции $\psi(\cdot)$ на границе области заданы граничные условия вида (8) и (9): функции $\alpha_{ab}^{\pm}(\cdot)$ и $\beta_{ab}^{\pm}(\cdot)$ определяют напряжения и перемещения на дефекте ab, функции $\alpha_L^{\pm}(\cdot)$ и $\beta_L^{\pm}(\cdot)$ – на контуре L.

Пусть $\psi_0(\cdot)$ – потенциал для плоскости с дефектом ab, $\psi(\cdot)$ – потенциал для плоскости с отверстием, ограниченным контуром L, и с дефектом ab. Тогда функция $\psi_1(\cdot) = \psi(\cdot) - \psi_0(\cdot)$ является аналитической на плоскости с отверстием.

Потенциал $\psi_0(\cdot)$ для плоскости с дефектом имеет вид

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\gamma_0(\tau)\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}d\tau + C_0,$$

где $\gamma_0(\tau) = \beta_0^+(\tau) - \beta_0^-(\tau) + i(\alpha_0^+(\tau) - \alpha_0^-(\tau))$, $\tau \in ab$, C_0 – некоторая комплексная постоянная.

В случае потенциала для плоскости с отверстием дефекту ab соответствует контур L, и, если принять произвольную точку a_1 за начало и, одновременно, конец контура L, то дуга τb соответствует дуге τa_1. Поэтому

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\gamma_1(\tau)\int\limits_{\tau a_1}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}d\tau + C_1,$$

где $\gamma_1(\tau) = \beta_1^+(\tau) - \beta_1^-(\tau) + i(\alpha_1^+(\tau) - \alpha_1^-(\tau))$, $\tau \in L$, C_1 – некоторая комплексная постоянная.

Для решения граничных задач необходимо найти функции $\alpha_0^+(\cdot) - \alpha_0^-(\cdot)$, $\beta_0^+(\cdot) - \beta_0^-(\cdot)$ на дефекте ab и функции $\alpha_1^+(\cdot) - \alpha_1^-(\cdot)$, $\beta_1^+(\cdot) - \beta_1^-(\cdot)$ на контуре L, которые определяют потенциалы $\psi_0(\cdot)$ и $\psi_1(\cdot)$.

Теорема 2. *Первая и вторая основные граничные задачи в случае обобщенной антиплоской деформации для упругой однородной изотропной плоскости с отверстием, ограниченным гладким контуром L, и с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab эквивалентны интегральным уравнениям*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ab}[(\alpha_0^+(\tau)-\alpha_0^-(\tau))\,\mathrm{Im}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}-(\beta_0^+(\tau)-\beta_0^-(\tau))\,\mathrm{Re}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}[(\alpha_1^+(\tau)-\alpha_1^-(\tau))\operatorname{Im}\int\limits_{\tau a_1}\frac{d\xi}{\xi-t}-(\beta_1^+(\tau)-\beta_1^-(\tau))\operatorname{Re}\int\limits_{\tau a_1}\frac{d\xi}{\xi-t}]d\tau$$

$$-i2\operatorname{Im}(C_0+C_1)=$$

$$=\{\int\limits_{at}(\alpha_{ab}^+(\tau)+\alpha_{ab}^-(\tau))d\tau+2A_{ab},\ t\in ab;$$

$$\int\limits_{a_1t}(\alpha_L^+(\tau)+\alpha_L^-(\tau))d\tau+2A_L,\ t\in L\},$$

$$\int\limits_{at}(\alpha_0^+(\tau)-\alpha_0^-(\tau))d\tau+\int\limits_{a_1t}(\alpha_1^+(\tau)-\alpha_1^-(\tau))d\tau=$$

$$=\{\int\limits_{at}(\alpha_{ab}^+(\tau)-\alpha_{ab}^-(\tau))d\tau,\ t\in ab;\quad \int\limits_{a_1t}(\alpha_L^+(\tau)-\alpha_L^-(\tau))d\tau,\ t\in L\}$$

(первая граничная задача),
и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{ab}[(\beta_0^+(\tau)-\beta_0^-(\tau))\operatorname{Im}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}+(\alpha_0^+(\tau)-\alpha_0^-(\tau))\operatorname{Re}\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}]d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}[(\beta_1^+(\tau)-\beta_1^-(\tau))\operatorname{Im}\int\limits_{\tau a_1}\frac{d\xi}{\xi-t}+(\alpha_1^+(\tau)-\alpha_1^-(\tau))\operatorname{Re}\int\limits_{\tau a_1}\frac{d\xi}{\xi-t}]d\tau$$

$$+2\operatorname{Re}(C_0+C_1)=$$

$$=\{\int\limits_{at}(\beta_{ab}^+(\tau)+\beta_{ab}^-(\tau))d\tau+2B_{ab},\ t\in ab;$$

$$\int\limits_{a_1t}(\beta_L^+(\tau)+\beta_L^-(\tau))d\tau+2B_L,\ t\in L\},$$

$$\int\limits_{at}(\beta_0^+(\tau)-\beta_0^-(\tau))d\tau+\int\limits_{a_1t}(\beta_1^+(\tau)-\beta_1^-(\tau))d\tau=$$

$$=\{\int\limits_{at}(\beta_{ab}^+(\tau)-\beta_{ab}^-(\tau))d\tau,\ t\in ab;\quad \int\limits_{a_1t}(\beta_L^+(\tau)-\beta_L^-(\tau))d\tau,\ t\in L\}$$

(вторая граничная задача).

3. Обобщенная плоская деформация. В случае малосжимаемого материала можно принять линейную зависимость упругого потенциала Φ от Δ – кратности изменения площади элемента плоскости $x_3 = const$ [3]

$$\Phi = 2\mu\{C(\lambda_3)\Delta + \Psi(\Lambda_1^0, \lambda_3)\},$$

где Λ_1^0 – тензор кратностей удлинений, λ_3 – кратность удлинения в направлении оси x_3^0, $C(\cdot)$, $\Psi(\cdot,\cdot)$ – некоторые функции. Можно показать, что в этом случае полученные в [3] граничные условия для произвольных аналитических функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ после интегрирования принимают вид

деформационное граничное условие

$$2\left(\frac{\int \Omega(f(\zeta)\overline{f(\zeta)}, \lambda_3) f(\zeta) d\zeta}{\overline{f(t)}} + \overline{g(t)}\right) = z(s^0) + C_1,\ t \in L,\ s^0 \in [0, l];$$

статическое граничное условие

$$\int\limits_{a_1 t} f^2(\tau) d\tau + 2C(\lambda)\left(\frac{\int \Omega(f(\zeta)\overline{f(\zeta)}, \lambda_3) f(\zeta) d\zeta}{\overline{f(t)}} + \overline{g(t)}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\mu} \int\limits_0^{s^0} [\sigma_{\nu_1^0}(\sigma^0) + i\sigma_{\nu_2^0}(\sigma^0)] d\sigma^0 + C_2,\ t \in L,\ s^0 \in [0, l],$$

где функции в правых частях равенств заданы и определяют соответственно перемещения и напряжения на контуре L, $\Omega(\cdot,\cdot)$ – решение алгебраического уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda_1^0}\left(2\left|\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right|, \lambda_3\right) = f(\zeta)\overline{f(\zeta)},$$

$C_1 = 2z(t(0)) - z_0(0)$, $C_2 = h(t(0)) + 2C(\lambda) z(t(0))$ – некоторые комплексные постоянные,

$$z = \frac{\int \Omega(f(\zeta)\overline{f(\zeta)}, \lambda_3) f(\zeta) d\zeta}{\overline{f(\zeta)}} + \overline{g(\zeta)},$$

$h'(\zeta) = f^2(\zeta)$. Связь между граничными значениями напряжений и смещений принимает вид

$$h(t) + C(\lambda)(z(s^0) + C_1) = \frac{i}{2\mu}\int\limits_0^{s^0}[\sigma_{\nu_1^0}(\sigma^0) + i\sigma_{\nu_2^0}(\sigma^0)]d\sigma^0 + C_2,$$

$$t \in L,\ s^0 \in [0, l].$$

В случае простейшего вида малосжимаемого материала, – полулинейного материала Джона, – имеем [3]

$$2\mu\Psi(\Lambda_1^0, \lambda_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda[(\Lambda_1^0 - 2) + (\lambda_3 - 1)]^2 + \mu[-2(\Lambda_1^0\lambda_3 - 1) + (\Lambda_1^0 + \lambda_3 - 1)^2],$$

$$C(\lambda_3) = -1,\ \frac{\partial\Psi}{\partial\Lambda_1^0}(\Lambda_1^0, \lambda_3) = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}|\frac{\partial z}{\partial\zeta}| - \frac{\lambda + \mu}{\mu}[1 - \frac{\lambda(\lambda_3 - 1)}{2(\lambda + \mu)}],$$

$$\Omega(f(\zeta)\overline{f(\zeta)}, \lambda_3) = 2\mu\frac{f(\zeta)\overline{f(\zeta)}}{2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}[1 - \frac{\lambda(\lambda_3 - 1)}{2(\lambda + \mu)}],$$

где λ, μ – постоянные Ламе.

Вместо функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удобно использовать функции $S(\cdot)$ и $T(\cdot)$

$$\overline{g'(\zeta)} = \alpha\overline{S(\zeta)},\ f(\zeta) = T'(\zeta)\sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\mu}},$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}K,\ K = 1 - \frac{\lambda(\lambda_3 - 1)}{2(\lambda + \mu)},$$

для которых в [3] получены граничные условия в дифференциальной и интегральной формах

$$II_m T'^2(t) - \frac{T'(t)}{\overline{T'(t)}} + (\overline{S(t)} - \frac{T(t)\overline{T''(t)}}{\overline{T'^2(t)}})e^{-i2\gamma^0} = g_m(s^0),\ m = 1, 2, \tag{11}$$

$$t \in L,\ s^0 \in [0, l],$$

где

$$II_1 = \frac{\lambda+\mu}{K\mu},\ II_2 = -\frac{1}{K},\ g_1(s^0) = (2\mu\alpha)^{-1}e^{-i\gamma^0}[\sigma_{\nu_1^0}(s^0) + i\sigma_{\nu_2^0}(s^0)],$$

$$g_2(s^0) = \frac{i}{\alpha}e^{-i\gamma^0}\frac{dz(s^0)}{ds^0},\ s^0 \in [0,l]$$

и

$$II_m \int\limits_{a_1 t} T'^2(\tau)d\tau - (\frac{\overline{T(t)}}{\overline{T'(t)}} + \int\limits_{a_1 t} \overline{S(\tau)d\tau}) = f_m(s^0), \qquad (12)$$

$$m = 1,2,\ t \in L,\ s^0 \in [0,l],$$

где

$$f_1(s^0) = i(2\mu\alpha)^{-1}\int\limits_{at}[\sigma_{\nu_1^0}(\sigma^0) + i\sigma_{\nu_2^0}(\sigma^0)]d\sigma^0,$$

$$f_2(s^0) = -\alpha^{-1}z(s^0) + C_1,\ t \in L,\ s^0 \in [0,l],$$

произвольная точка $a_1 = t(0)$ принята за начало и, одновременно, конец контура L, C_1 – произвольная комплексная постоянная, $m = 1$ в случае первой граничной задачи и $m = 2$ в случае второй граничной задачи.

Рассмотрим граничные задачи для плоскости с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab. В случае обобщенной плоской деформации назовем *комплексными потенциалами* для однородного изотропного упругого тела с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги аналитические в области с разрезом функции $S(\cdot)$ и $T(\cdot)$, предельные значения которых удовлетворяют на ab условиям вида (11) или (12). Доказана

Лемма 2. *Если предельные значения аналитических в разрезанной по дуге ab плоскости ζ функций $S(\cdot)$ и $T(\cdot)$ удовлетворяют условиям вида (11) или (12), то*

$$T(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\alpha(\tau)\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}d\tau + C_T,$$

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\overline{\beta(\tau)}\int\limits_{\overline{\tau}b}\frac{d\xi}{\xi-\zeta}d\overline{\tau} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\zeta} + C_g,$$

где $g'(\zeta) = \alpha S(\zeta)$,

$$(\alpha^{\pm}(t))^2 = \frac{g_1^{\pm}(s^0) - g_2^{\pm}(s^0)}{II_1 - II_2},\ \alpha(t) = \alpha^+(t) - \alpha^-(t),\ t \in ab,\ s^0 \in [0,l],$$

$$\beta^{\pm}(t) = \alpha\left(\frac{II_2}{II_1 - II_2}g_1^{\pm}(s^0) - \frac{II_1}{II_1 - II_2}g_2^{\pm}(s^0)\right),$$

$$\beta(t) = \beta^+(t) - \beta^-(t),\ t \in ab,\ s^0 \in [0,l],$$

$$\gamma^{\pm}(t) = -\frac{\alpha}{\alpha^{\pm}(t)}\Big(\int\limits_{at}\overline{\alpha^{\pm}(\tau)d\tau} + \overline{C}\Big),$$

$$\gamma(t) = \gamma^+(t) - \gamma^-(t),\ t \in ab,\ s^0 \in [0,l],$$

C_g *и* C_T – *произвольные комплексные постоянные при условии, что функции* $g(\cdot)$ *и* $T(\cdot)$ *ограничены на бесконечности,* $C = T^{\pm}(a)$.

В случае материала Джона справедлива

Теорема 3. *Первая и вторая основные граничные задачи в случае обобщенной плоской деформации для упругой однородной изотропной плоскости с дефектом вдоль гладкой разомкнутой дуги ab эквивалентны интегральным уравнениям*

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{ab}\alpha(\tau)\int\limits_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - t}d\tau = \int\limits_{at}(\alpha^+(\tau) + \alpha^-(\tau))d\tau + 2(C - C_T),\ t \in ab,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{ab}\overline{\beta(\tau)}\int\limits_{\overline{\tau}b}\frac{d\xi}{\xi - t}d\overline{\tau} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{ab}\gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau - t} =$$

$$= \int\limits_{at}(\overline{\beta^+(\tau)} + \overline{\beta^-(\tau)})d\overline{\tau} + \gamma^+(t) + \gamma^-(t) - 2C_g,\ t \in ab.$$

Заметим, что искомые функции нелинейно входят в интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах. В случае первой (второй) граничной задачи функции $g_1^\pm(\cdot)$ ($g_2^\pm(\cdot)$) заданы на дефекте, а функции $g_2^\pm(\cdot)$ ($g_1^\pm(\cdot)$) должны быть найдены из интегральных уравнений. Если известны функции $g_i^\pm(\cdot)$, $i = 1, 2$, то можно найти функции $S(\cdot)$ и $T(\cdot)$, по которым определяются искомые физические величины.

Отметим, что эквивалентные граничным задачам интегральные уравнения получены при подстановке предельных значений комплексных потенциалов в граничные условия. Комплексные потенциалы при обобщенной антиплоской деформации определяются скачками напряжений и перемещений, а при обобщенной плоской деформации – компонентами тензора напряжений и вектора перемещений.

Литература

[1] Гусенкова А.А., Плещинский Н.Б. *Интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах граничных задач плоской теории упругости для областей с дефектом* // ПММ. – 2000. – Т. 64, Вып. 3. – С.454–461.

[2] Гусенкова А.А. *Интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах двумерных задач для анизотропных тел с дефектом* // ЖВМиМФ. – 2002. – Т. 42, N 7. – С.1066–1078.

[3] Черных К.Ф. *Нелинейная сингулярная упругость. Часть I. Теория.* – СПб, 1999. – 276 с.

[4] Gousenkova A.A. *Mathematical methods in some problems of elastodynamics for domains with a defect* // Book abstr. XXX Summer School "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg (Repino), Russia, June 27–July 6, 2002. – P. 47.