

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДА С РАЗМЫТОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е.М. Карчевский (Казань)

Задача о собственных модах диэлектрического волновода с размытой границей формулируется как спектральная задача для системы уравнений Максвелла с граничными условиями Свешникова-Рейхардта на бесконечности. Собственными значениями этой задачи являются комплексные постоянные распространения, лежащие на соответствующей римановой поверхности. Исходная задача сводится к нелинейной спектральной задаче для сильно сингулярного интегрального уравнения по площади поперечного сечения волновода, которое часто используется на практике для расчета спектральных характеристик волноводов. Доказывается, что оператор интегрального уравнения является фредгольмовым. Ранее было известно лишь то, что этот оператор является полуфредгольмовым. Полученный результат может быть использован при обосновании численных методов решения задачи.

## Введение

В настоящей работе методы теории сингулярных интегральных операторов [1] применяются к математическому исследованию задачи о собственных модах диэлектрического волновода с размытой границей. Показатель преломления такого волновода является гладкой функцией во всей плоскости поперечного сечения и нигде не терпит разрывов. Задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрических структурах с размытой границей, то есть не имеющих четкой границы раздела сред, привлекают в последние годы большое внимание (см., например, [2], [3] и цитированную там литературу). В частности, при постановке спектральных задач теории диэлектрических волноводов,

часто делается предположение о том, что характеристики волновода плавно переходят в характеристики окружающей среды (см., например, [4], [5]). Эта модель наиболее адекватна для естественных природных волноводов и для искусственных волноводов, изготовленных методом диффузии.

Отметим, что ранее в статьях [6], [7] результаты спектральной теории оператор-функций применялись к исследованию качественных свойств спектра диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения с постоянным показателем преломления. При этом использовались контурные интегральные уравнения по границе поперечного сечения волновода. В настоящей работе применяется интегральное уравнение по площади его поперечного сечения.

Интегральное уравнение по площади поперечного сечения волновода широко используется для численного решения задачи (см., например, [8], [9]). Это уравнение является сильно сингулярным, что затрудняло его использование для теоретического исследования качественных свойств спектра исходной задачи и для обоснования известных численных методов, основанных на аппроксимации интегрального оператора проекционными методами [8], [9]. Исключение составляет статья [10], в которой для вещественных постоянных распространения доказано, что оператор интегрального уравнения является симметричным и полуфредгольмовым. Это позволило автору исследовать вопросы существования собственных значений. Отметим, что результаты работы [10] справедливы и для волновода с резкой границей.

В работе методами теории сингулярных интегральных операторов [1] доказывается, что для комплексных значений постоянных распространения интегральный оператор является фредгольмовым. Методика доказательства заимствована из книги [3], посвященной теоретическому изучению трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на неоднородных проницаемых телах. Результат, представленный в настоящей работе, важен как для будущего исследования сходимости численных методов [8], [9], так и для разработки новых теоретически обоснованных алгоритмов решения задачи. Такое обоснование может быть проведено на основе общих результатов о сходимости проекционных методов решения нелинейных спектральных задач [11].

## Постановка задачи

Пусть трехмерное пространство  $\{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$  занято изотропной средой без источников, и пусть показатель преломления представляет собой положительную вещественнозначную функцию  $n = n(x_1, x_2)$ , независящую от продольной координаты  $x_3$ , и равную константе  $n_\infty$  вне некоторого цилиндра. Образующая этого цилиндра параллельна координатной оси  $x_3$ , и его поперечное сечение является некоторой ограниченной областью  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : \infty < x_1, x_2 < \infty\}$ . Обозначим через  $\Omega_\infty$  неограниченную область  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , и через  $n_+$  – максимум функции  $n$  в области  $\Omega$ . Будем считать в дальнейшем, что  $n_+ > n_\infty$ . Пусть функция  $n$  принадлежит пространству вещественнозначных непрерывных в  $\mathbb{R}^2$  функций.

Задача о собственных модах волновода может быть сформулирована как векторная спектральная задача для системы уравнений Максвелла в предположении, что векторы напряженности электрического и магнитного поля имеют следующий вид:

$$\mathcal{E}(x, x_3, t) = \operatorname{Re}(E(x) \exp(i\beta x_3 - i\omega t)), \quad (1)$$

$$\mathcal{H}(x, x_3, t) = \operatorname{Re}(H(x) \exp(i\beta x_3 - i\omega t)). \quad (2)$$

Здесь  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\omega > 0$  – круговая частота,  $\beta$  – постоянная распространения,  $E$  и  $H$  – комплексные амплитуды векторов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ . Мы рассматриваем постоянную распространения  $\beta$  как неизвестный комплексный параметр и  $\omega > 0$  – как заданный параметр.

Для полей, имеющих форму (1), (2), система уравнений Максвелла сводится к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{Rot}_\beta E = i\omega\mu_0 H, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

$$\operatorname{Rot}_\beta H = -i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_0, \mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость свободного пространства, соответственно,

$$\operatorname{Rot}_\beta E = \begin{bmatrix} \partial E_3 / \partial x_2 - i\beta E_2 \\ i\beta E_1 - \partial E_3 / \partial x_1 \\ \partial E_2 / \partial x_1 - \partial E_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Через  $C^2(\mathbb{R}^2)$  обозначим пространство дважды непрерывно дифференцируемых в  $\mathbb{R}^2$  комплекснозначных функций. Мы будем

разыскивать нетривиальные решения  $[E, H]$  системы (3), (4) в пространстве  $(C^2(\mathbb{R}^2))^6$ .

Пусть

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \in (C^2(\mathbb{R}^2))^3,$$

и пусть  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . По определению положим

$$\text{Div}_\beta F = \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial x_2 + i\beta F_3,$$

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2,$$

$$\text{Grad}_\beta u = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x_1 \\ \partial u / \partial x_2 \\ i\beta u \end{bmatrix}, \quad \text{gradu} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x_1 \\ \partial u / \partial x_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{grad}_2 u = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x_1 \\ \partial u / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

**Лемма 1.** Если  $[E, H]$  – решение системы уравнений (3), (4), то

$$[\Delta + (k^2 n_\infty^2 - \beta^2)] \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \quad (5)$$

где  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ .

Доказательство приведено в работе [12].

Для корректной постановки задачи о собственных модах волновода необходимо поставить определенные условия на бесконечности, которым должны удовлетворять функции  $E$  и  $H$ . В силу леммы 1 вне области  $\Omega$  решения системы уравнений (3), (4) удовлетворяют уравнению Гельмгольца (5). Наиболее общим условием на бесконечности для такого уравнения является условие излучения Свешникова-Рейхардта [13], [14]. Оно широко применяется при постановке волноводных задач (см., например, [15], [4] и цитированную там литературу).

**Определение 1.** Пусть  $R_0$  – достаточно большое положительное число, такое, что  $\Omega$  целиком помещается в круг  $\Omega_{R_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R_0\}$ . Обозначим через  $\Gamma_{R_0}$  границу этого круга. Будем говорить, что функции  $E$  и  $H$  удовлетворяют условию

излучения Свешникова-Рейхардта, если для любого  $x$ , такого, что  $|x| \geq R_0$ , функции  $E$  и  $H$  разлагаются в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} H_n^{(1)}(\chi(\beta)r) \exp(in\varphi). \quad (6)$$

Здесь  $H_n^{(1)}$  - функции Ханкеля первого рода индекса  $n$ ,  $(r, \varphi)$  - полярные координаты точки  $x$ ,  $\chi(\beta) = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - \beta^2}$ .

Функции Ханкеля являются многозначными. Для того, чтобы представить их, как однозначные аналитические функции комплексного переменного  $\beta$ , мы будем рассматривать их определенными на римановой поверхности  $\Lambda$  функции  $\ln(\chi(\beta))$ . Поверхность Римана  $\Lambda$  состоит из бесконечного числа листов. Главный ("физический") лист  $\Lambda_0^{(1)}$  определяется условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(1)}.$$

Функции  $H_n^{(1)}(\chi r)$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $-\pi/2 < \arg \chi < 3\pi/2$ , имеют следующую асимптотику:

$$H_n^{(1)}(\chi r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi r}} \exp \left[ i \left( \chi r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 + O \left( \frac{1}{\chi r} \right) \right]. \quad (7)$$

Условие излучения Свешникова-Рейхардта ограничивает множество всех возможных решений уравнения Гельмгольца так, чтобы на главном листе  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  находились постоянные распространения  $\beta$ , отвечающие поверхностным волнам (экспоненциально убывающим на бесконечности функциям  $E$  и  $H$ ).

Риманова поверхность  $\Lambda$  имеет две точки разветвления  $k n_\infty$  и  $-k n_\infty$ . С листом  $\Lambda_0^{(1)}$  вдоль разреза, выбранным исходя из условия  $\text{Im}(\chi(\beta)) = 0$  (то есть проходящим по мнимой оси и интервалу  $(-k n_\infty, k n_\infty)$  вещественной оси), соединен лист  $\Lambda_0^{(2)}$ . Этот лист называется "нефизическим" и определяется условиями

$$-\pi/2 < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im}(\chi(\beta)) < 0, \quad \beta \in \Lambda_0^{(2)}.$$

Согласно асимптотике (7), на листе  $\Lambda_0^{(2)}$  находятся постоянные распространения  $\beta$ , отвечающие вытекающим волнам (экспоненциально возрастающим на бесконечности функциям E и H). Вдоль разреза, проходящего по вещественной оси и соединяющего точки  $kn_\infty$  и  $-kn_\infty$  через бесконечно удаленную точку, к листу  $\Lambda_0^{(2)}$  присоединены листы  $\Lambda_m^{(1)}, \Lambda_m^{(2)}, m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Эти листы определяются следующими условиями:

$$\begin{aligned} -\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \operatorname{Im}(\chi(\beta)) \geq 0, \beta \in \Lambda_m^{(1)}, \\ -\pi/2 + 2\pi m < \arg \chi(\beta) < 3\pi/2 + 2\pi m, \operatorname{Im}(\chi(\beta)) < 0, \beta \in \Lambda_m^{(2)}. \end{aligned}$$

Из известного разложения

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\chi \exp(i2\pi m)r) &= \alpha_n^{(m)} H_n^{(1)}(\chi r) \\ &+ \gamma_n^{(m)} \overline{H_n^{(1)}}(\chi r), \quad \alpha_n^{(m)}, \gamma_n^{(m)} \neq 0, \end{aligned}$$

справедливого для  $m \neq 0$ , всех  $n$  и  $\beta \in \bigcup_{m \neq 0} (\Lambda_m^{(1)} \cup \Lambda_m^{(2)})$ , а также асимптотики (7) следует, что постоянным распространения  $\beta$ , лежащим на листах  $\Lambda_m^{(1)}, \Lambda_m^{(2)}, m = \pm 1, \pm 2, \dots$  отвечают функции E и H, представляющие собой суммы поверхностных и вытекающих волн.

**Определение 2.** Ненулевой вектор  $[E, H] \in (C^2(\mathbb{R}^2))^6$  будем называть собственным вектором задачи (3), (4), (6), отвечающим собственному значению  $\beta \in \Lambda$ , если выполнены условия (3), (4), (6). Спектром задачи (3), (4), (6) будем называть множество ее собственных значений.

**Теорема 1.** Области

$$D = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \operatorname{Re} \beta = 0\} \cup \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : |\beta| < kn_\infty, \operatorname{Im} \beta = 0\}, \quad (8)$$

и

$$B = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : |\beta| \geq kn_+, \operatorname{Im} \beta = 0\}. \quad (9)$$

главного листа  $\Lambda_0^{(1)}$  римановой поверхности  $\Lambda$  не содержат собственных значений задачи (3), (4), (6). Спектр задачи (3), (4), (6) может состоять лишь из изолированных точек. Каждое собственное значение задачи (3), (4), (6) непрерывно зависит от

$\omega > 0$  и может появляться и исчезать с изменением  $\omega$  лишь на границе римановой поверхности  $\Lambda$ , то есть на бесконечности и в точках  $\pm kn_\infty$ .

Доказательство приведено в статье [12].

### Фредгольмовость сильно сингулярного интегрального оператора

Сведем теперь задачу (3), (4), (6) к нелинейной спектральной задаче для сильно сингулярного интегрального уравнения по области поперечного сечения волновода, аналогичного [8], [9], [10], которое часто используется на практике для расчетов спектральных характеристик волноводов.

Для всех  $\beta \in \Lambda$  имеем

$$E(x) = (k^2 n_\infty^2 + \text{Grad}_\beta \text{Div}_\beta) \frac{1}{n_\infty^2} \int_{\Omega} (n^2(y) - n_\infty^2) \Phi(\beta; x, y) E(y) dy, \quad (10)$$

$$\Phi(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi(\beta) |x - y|), \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in \Omega.$$

Этот результат хорошо известен для  $\beta \in G$ , где

$$G = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : kn_\infty < |\beta| < kn_+ \text{ Im}\beta = 0\},$$

(см., например, [16]). Требуемый результат для всех  $\beta \in \Lambda$  может быть легко получен методом функции Грина векторного уравнения Гельмгольца для электрического поля с использованием соотношения

$$\int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial E(y)}{\partial |y|} \Phi(\beta; x, y) - \frac{\partial \Phi(\beta; x, y)}{\partial |y|} E(y) \right) dy = 0, \quad R \geq R_0,$$

которое справедливо (см., например, [15]) для всех  $\beta \in \Lambda$  и произвольной функции  $E$ , удовлетворяющей условию Свешникова-Рейхардта (6).

**Лемма 2.** Пусть  $[E, H]$  – собственный вектор задачи (3), (4), (6), отвечающий собственному значению  $\beta \in \Lambda$ . Тогда

$$(\mathcal{Q}(\beta)E)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\beta)\mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)\mathbf{E}(x) \\ &\quad - \int_{\Omega} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_{\infty}^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy \\ &\quad - v.p. \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_{\infty}^2} - 1 \right) \mathbf{E}(y) \right) dy, \end{aligned}$$

$$T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (K\mathbf{F})_1 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_1 \\ (K\mathbf{F})_2 + i\beta F_3 \partial\Phi/\partial x_2 \\ i\beta F_1 \partial\Phi/\partial x_1 + i\beta F_2 \partial\Phi/\partial x_2 + (k^2 n_{\infty}^2 - \beta^2) F_3 \Phi \end{bmatrix},$$

$$T_1\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}(y), \text{grad}_2) \text{grad}_2 \Phi_1(x, y) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta(x) = \begin{pmatrix} n^2(x)/n_{\infty}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n^2(x)/n_{\infty}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} K(\beta; x, y)\mathbf{F}(y) &= k^2 n_{\infty}^2 \mathbf{F}(y)\Phi(\beta; x, y) \\ &\quad + (\mathbf{F}(y), \text{grad}_2) \text{grad}_2 \Phi_0(\beta; x, y), \end{aligned}$$

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - y|, \quad \Phi_0(\beta; x, y) = \Phi(\beta; x, y) - \Phi_1(x, y).$$

Утверждение леммы мы получаем непосредственными вычислениями, внося оператор  $\text{Grad}_{\beta}\text{Div}_{\beta}$  под знак интеграла в соотношении (10) и используя правило дифференцирования слабо сингулярных интегралов [1, р. 242].

Для всех  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$ , определенный равенством (11), будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\Omega)]^3$ . Для всех  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  имеет сильно сингулярное ядро.

**Теорема 2 .** Для всех  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов.

Доказательство. Пусть  $\beta$  — фиксированное число, принадлежащее  $\Lambda$ . Через  $\mathcal{Q}^*(\beta)$  обозначим оператор, сопряженный с  $\mathcal{Q}(\beta)$ .

Непосредственными вычислениями для  $x \in \Omega$  мы получаем

$$(\mathcal{Q}^*(\beta)E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) \quad (12)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\Omega} T^p(\beta; x, y) E(y) dy \quad (13)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) v.p. \int_{\Omega} T_1(x, y) E(y) dy, \quad (14)$$

где

$$T^p F = \begin{bmatrix} (\overline{K}F)_1 + i\overline{\beta}F_1\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 \\ (\overline{K}F)_2 + i\overline{\beta}F_2\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 \\ i\overline{\beta}F_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_1 + i\overline{\beta}F_3\partial\overline{\Phi}/\partial x_2 + (k^2 n_\infty^2 - \overline{\beta}^2) F_3\overline{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что ядро  $T_1(x, y)$  сильно сингулярное, самосопряженное и не зависит от  $\beta$ ; ядра  $T(\beta; x, y)$ ,  $T^p(\beta; x, y)$  слабо полярные для любого  $\beta \in \Lambda$ .

Докажем теперь, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  фредгольмов. Мы будем использовать общие результаты теории многомерных интегральных сингулярных матричных операторов [1, р. 368]. По определению положим

$$(\mathcal{D}(\beta)E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) \quad (15)$$

$$- p(x) \int_{\mathbb{R}^2} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy \quad (16)$$

$$- v.p. \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \quad (17)$$

где  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $p(x)$  – бесконечно дифференцируемая вещественнозначная функция, которая имеет компактный носитель в  $\mathbb{R}^2$  и тождественно равна 1 для  $x \in \Omega$ . Для всех  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  мы будем рассматривать как оператор в пространстве комплекснозначных функций  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$ . Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  мы получаем

$$(\mathcal{D}^*(\beta)E)(x) = E(x) + \frac{1}{2}\eta(x)E(x) \quad (18)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} p(y) T^p(\beta; x, y) E(y) dy \quad (19)$$

$$- \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) v.p. \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy. \quad (20)$$

Интегральные операторы, определенные слагаемыми (16) и (19), компактны в  $[L_2(\mathbb{R}^2)]^3$  для всех  $\beta \in \Lambda$ . Обозначим их через  $C(\beta)$  and  $C^*(\beta)$  соответственно. Обозначим для  $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (SE)(x) &= E(x) + \frac{1}{2} \eta(x) E(x) \\ &\quad - v.p. \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) E(y) \right) dy, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} (S^*E)(x) &= E(x) + \frac{1}{2} \eta(x) E(x) \\ &\quad - \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) v.p. \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) E(y) dy \end{aligned}$$

и

$$D(\beta) = C(\beta) + S, \quad D^*(\beta) = C^*(\beta) + S^*.$$

Непосредственными вычислениями для  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $l, m = 1, 2$  мы получаем

$$\begin{aligned} (S_{l,m}^* E_m)(x) &= \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) \right) \delta_{l,m} E_m(x) \\ &\quad - \left( \frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1 \right) v.p. \int_{\mathbb{R}^2} (2\alpha_l(\varphi)\alpha_m(\varphi) - \delta_{l,n}) \frac{E_m(y)}{2\pi|x-y|^2} dy, \end{aligned}$$

$$(S_{3,3}^* E_3)(x) = E_3(x),$$

$$(S_{1,3}^* E_3)(x) = 0,$$

$$(S_{3,m}^* E_n)(x) = 0,$$

где  $\delta_{l,m}$  – символ Кронекера;  $\alpha_1(\varphi)$  и  $\alpha_m(\varphi)$  – декартовы координаты точки  $\alpha = (y - x) / |x - y|$ ,

$$\alpha_1(\varphi) = \cos \varphi, \quad \alpha_2(\varphi) = \sin \varphi.$$

Функция  $n$  непрерывна в  $\mathbb{R}^2$  и  $n(x) = n_\infty$  для  $x \in \mathbb{R}^2 / \Omega$ . Следовательно, характеристики операторов  $\mathcal{S}_{l,n}^*$  непрерывны в  $\mathbb{R}^2$  и не зависят от  $x$  для  $x \in \mathbb{R}^2 / \Omega$ . Следовательно, непосредственными вычислениями мы получаем точное представление [1, р. 368] матричного символа  $\Psi^*(x, \alpha)$  оператора  $\mathcal{S}^*$ :

$$\begin{aligned} \Psi^*(x, \alpha) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1^2(\varphi) & \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi) & 0 \\ \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_1(\varphi)\alpha_2(\varphi) & 1 + \left(\frac{n^2(x)}{n_\infty^2} - 1\right) \alpha_2^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \Gamma_1$ . Функция  $n$  вещественна, следовательно матричный символ  $\Psi(x, \alpha)$  сингулярного интегрального оператора  $\mathcal{S}$  равен  $\Psi^*(x, \alpha)$ ,

$$\Psi(x, \alpha) = \Psi^*(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Gamma_1.$$

Очевидно, имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Gamma_1} |\det \Psi(x, \alpha)| &> 0, \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Gamma_1} \left| \det \begin{pmatrix} \Psi_{1,1}(x, \alpha) & \Psi_{1,2}(x, \alpha) \\ \Psi_{2,1}(x, \alpha) & \Psi_{2,2}(x, \alpha) \end{pmatrix} \right| &> 0, \quad (21) \\ \inf_{x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \Gamma_1} |\Psi_{1,1}(x, \alpha)| &> 0. \end{aligned}$$

Следовательно [1, pp. 362, 379], оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов.

Докажем теперь, что индекс оператора  $\mathcal{Q}(\beta)$  равен индексу оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  для всех  $\beta \in \Lambda$ . Пусть вектор-функция  $W(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежит множеству  $N(\mathcal{D})$  нулей оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ . Нетрудно видеть, что для всех  $x \in \Omega$  справедливо равенство

$$(\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (22)$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(Q)$  нулей оператора  $Q(\beta)$ :

$$W(x) = V(x), \quad x \in \Omega.$$

По определению оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  имеем для всех  $x \in \mathbb{R}^2$  следующее равенство:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(\beta)W)(x) &= W(x) + \frac{1}{2}\eta(x)W(x) \\ &\quad - p(x) \int_{\mathbb{R}^2} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy \\ &\quad - v.p. \int_{\mathbb{R}^2} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) W(y) \right) dy. \end{aligned}$$

Из двух последних равенств, учитывая то, что  $n(x) = n_\infty$  при  $x \in \Omega_\infty$ , получаем связь вектор-функций  $V(x)$  и  $W(x)$  для  $x \in \Omega_\infty$ :

$$\begin{aligned} W(x) &= p(x) \int_{\Omega} T(\beta; x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy \\ &\quad + v.p. \int_{\Omega} T_1(x, y) \left( \left( \frac{n^2(y)}{n_\infty^2} - 1 \right) V(y) \right) dy. \end{aligned}$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  однозначно связаны с нулями оператора  $Q(\beta)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2$ , и размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}) = \dim N(Q). \tag{23}$$

Пусть теперь вектор-функция  $W^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  принадлежит множеству  $N(\mathcal{D}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Учитывая явный вид этого оператора (18) – (20), получаем следующее равенство:

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = W^*(x) = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \tag{24}$$

Из этого равенства и равенств (18) – (20), (12) – (14) имеем \*

$$(\mathcal{D}^*(\beta)W^*)(x) = (Q^*(\beta)W^*)(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{25}$$

Следовательно, для всех  $x \in \Omega$  вектор-функция  $W^*(x)$  совпадает с некоторой вектор-функцией  $V^*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , принадлежащей множеству  $N(Q^*)$  нулей оператора  $Q^*(\beta)$ :

$$W^*(x) = V^*(x), \quad x \in \Omega. \quad (26)$$

Таким образом, нули оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$  однозначно связаны с нулями оператора  $Q^*(\beta)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^2$ , и размерности множеств нулей этих операторов совпадают:

$$\dim N(\mathcal{D}^*) = \dim N(Q^*). \quad (27)$$

Окончательно, используя (23) и (27), для всех  $\beta \in \Lambda$  имеем равенство индексов оператора  $Q(\beta)$  и оператора  $\mathcal{D}(\beta)$ :

$$\begin{aligned} \text{Ind } \mathcal{D} &= \dim N(\mathcal{D}) - \dim N(\mathcal{D}^*) \\ &= \dim N(Q) - \dim N(Q^*) = \text{Ind } Q. \end{aligned}$$

Согласно доказанному выше, индекс оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  равен нулю. Следовательно, равен нулю и индекс оператора  $Q(\beta)$ .

Оператор  $\mathcal{D}(\beta)$  фредгольмов, а значит, нормально разрешим. Докажем теперь, что оператор  $Q(\beta)$  также нормально разрешим. Рассмотрим уравнение

$$(Q(\beta)W)(x) = W^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

где вектор правой части  $W^0$  ортогонален множеству  $N(Q^*)$  нулей оператора  $Q^*(\beta)$ . Пусть вектор-функция  $U^0 \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  совпадает с вектор-функцией  $W^0(x)$  для всех  $x \in \Omega$  и тождественно равна нулю в  $\Omega_\infty$ . Учитывая представления (24), (26) для нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ , приходим к заключению, что вектор-функция  $U^0$  ортогональна множеству нулей оператора  $\mathcal{D}^*(\beta)$ . Следовательно, в силу фредгольмовости оператора  $\mathcal{D}(\beta)$  существует решение  $U \in (L_2(\mathbb{R}^2))^3$  уравнения

$$(\mathcal{D}(\beta)U)(x) = U^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (29)$$

Представим вектор-функцию  $U(x)$  в виде суммы двух вектор-функций:

$$U(x) = V(x) + W(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где  $V(x) = 0$  при  $x \in \Omega$ , а  $W(x) = 0$  при  $x \in \Omega_\infty$ . Заметим, что для такой вектор-функции  $W(x)$  справедливо равенство (22), а

вектор-функция  $U(x)$  удовлетворяет уравнению (29). Следовательно, при  $x \in \Omega$  имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} W^0(x) &= U^0(x) = (\mathcal{D}(\beta)U)(x) \\ &= (\mathcal{D}(\beta)W)(x) = (\mathcal{Q}(\beta)W)(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой вектор-функции  $W^0$ , ортогональной множеству  $N(\mathcal{Q}^*)$  нулей оператора  $\mathcal{Q}^*(\beta)$ , существует решение  $W \in (L_2(\Omega))^3$  уравнения (28). А это значит, что оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим для всех  $\beta \in \Lambda$ . Итак, для всех  $\beta \in \Lambda$  оператор  $\mathcal{Q}(\beta)$  нормально разрешим, индекс его равен нулю, следовательно, по определению он фредгольмов. Доказательство теоремы завершено.

## Литература

- [1] Mikhlin S.G., Prossdorf S.P. *Singular Integral Operators*. – Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [2] Colton D., Kress R. *Time harmonic electromagnetic waves in an inhomogeneous medium* // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1990. V. 116A. – P.279–293.
- [3] Самохин А.Б. *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии*. – М.: Радио и связь, 1998.
- [4] Nosich A. I. *Radiation conditions, limiting absorption principle, and general relations in open waveguide scattering* // J. Electromag. Waves Applicat. – 1994. – V. 8, No 3. – P.329–353.
- [5] Jablonski T. F. *Complex modes in open lossless dielectric waveguides* // J. Opt. Soc. Am. A. – 1994. – V. 11, No 4. – P.1272–1282.
- [6] Карчевский Е.М. *К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, No 9. – С.1558–1563.

- [7] Карчевский Е.М. *Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов* // Дифференц. уравн. – 2000. – Т. 37, No 4. – С.1109–1111.
- [8] Bagby J.S., Nyquist D.P., Drachman B.C. *Integral formulation for analysis of integrated dielectric waveguides* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1985. – MTT-29. – P.906–915.
- [9] Van Splunter J.M., Blok H., Baken N.H.G., Dane M.F. *Computational analysis of propagation properties of integrated-optical waveguides using a domain integral equation* // Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory, 1986, Budapest. – P.321–323.
- [10] Urbach H.P. *Analysis of the domain integral operator for anisotropic dielectric waveguides* // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – V.27. – P.204–220.
- [11] Вайникко Г.М., Карма О.О. *О быстрой сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1974. – Т. 14, No 6. – С.1393–1408.
- [12] Карчевский Е.М., Носич И.А., Соловьев С.И. *Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – С. 79 – 114.
- [13] Свешников А.Г. *Дифракция на звездном теле* // Выч. методы и программирование. Вып. 13. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1969. – С.145–151.
- [14] Reichardt H. *Ausstrahlungsbedingungen fur die Wellengleichung* // Abh. Mathem. Seminar Univ. Hamburg. – 1960. – V. 24. – P.41–53.
- [15] Ильинский А.С. Шестопапов Ю.В. *Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн.* – М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [16] Harrington R.F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields.* – McGraw-Hill, 1961.