

Теорема 1. Если множество $K \subset L^0(X)$ вполне ограничено, то существует такая функция $\varphi \in \Phi_1$, для которой $K \subset \varphi(L)$ и K вполне ограничено в $\varphi(L)$.

Конечно, из полной ограниченности множества в $\varphi(L)$ вытекает полная ограниченность и в $L^0(X)$.

Далее рассмотрим случай $X = [0, 1]^n$ с мерой Лебега μ . Следующая теорема является аналогом классического критерия L^p -компактности М. Рисса для пространства $L^0([0, 1]^n)$ (см. [2], с. 242).

Теорема 2. Множество $K \subset L^0([0, 1]^n)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия:

- 1) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{f \in K} \mu\{|f| > \lambda\} = 0$,
- 2) $\lim_{|h| \rightarrow +0} \sup_{f \in K} \int_{\prod_{k=1}^n [0, 1-h_k]} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1 + |f(x+h) - f(x)|} d\mu(x) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // УМН. - Т. 27. - № 2. - С. 3-52.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука, 1965. - 520 с.

И. Р. Каюмов, А. Хинкканен

Казань, Урбана (США)

О КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОЛИНОМОВ

Смейл в своей работе [1] по исследованию метода Ньютона для систем полиномиальных уравнений получил следующий

результат. Для любого полинома f степени n и любого $z \in \mathbb{C}$ найдется критическая точка ζ , такая, что

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right| \leq K |f'(z)|, \quad (1)$$

причем в качестве K можно взять 4.

Предположим, что все нули полинома вещественны. В этом случае Пале [2] показал, что (1) верно при $K = 1$. Тишлер [3] улучшил этот результат, показав, что (1) выполнено при $K = 1 - 1/n$.

В более общем случае, когда все критические точки полинома вещественны, Шейл-Смолл [4], Рахман и Шмейсер [5] показали, что неравенство (1) справедливо при $K = e - 2$.

Нами доказана

Теорема. Пусть f — полином, все критические точки которого вещественны. Тогда (1) выполнено с точной константой $K = 2/3$, причем равенство достигается только для полиномов вида $f(\xi) = a + b\xi + c(\xi - z)^3$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$, $b/c < 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00381).

ЛИТЕРАТУРА

1. Smale S. *The fundamental theorem of algebra and complexity theory* // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1981. – V. 4. – P. 1–36.
2. Shub M., Smale S. *Computational complexity: On the geometry of polynomials and a theory of cost: II* // SIAM J. Comput. – 1986. – V. 15. – No 1. – P. 145–161.
3. Tischler D. *Critical points and values of complex polynomials* // J. Complexity. – 1989. – V. 5. – P. 438–456.
4. Sheil-Small T. *Complex polynomials*. – Cambridge University Press, 2002.

5. Rahman Q. I., Schmeisser G. *Analytic theory of polynomials*. – Oxford University Press, 2002.

Т. А. Кергилова

Горно-Алтайск, kergyl@gmail.com

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОБАЯСИ О МЕБИУСОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В работе [1] была введена новая характеристика Мебиусовых преобразований комплексной плоскости с использованием Аполлоновых точек для треугольников.

В 2007 г. Кобаяси [2] получил следующий признак мебиусовости отображения:

Теорема 1. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное инъективное отображение класса C^1 области U комплексной плоскости, такое, что для любой четверки точек $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in U$ с ангармоническим отношением

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} = \lambda$$

выполняется

$$[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] = \frac{(f(z_1) - f(z_3))(f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_3) - f(z_2))(f(z_4) - f(z_1))} = \lambda.$$

Тогда f — мебиусово преобразование.

Мы показываем, что теорема Кобаяси остается верной при любом $\lambda \notin \{0, 1, \infty\}$ без требования гладкости и инъективности f .

Теорема 2. Если $\lambda \notin \{0, 1, \infty\}$, то любое непрерывное отображение $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ области $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, такое, что

$$[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] = \frac{(f(z_1) - f(z_3))(f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_3) - f(z_2))(f(z_4) - f(z_1))} = \lambda$$