В. Ф. Зайцев, Л. В. Линчук

Санкт-Петербург, valentin_zaitsev@mail.ru

ЭВОЛЮЦИЯ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА – XX ВЕК

Важнейшей причиной первоначального "неприятия" группового анализа, вероятно, было то обстоятельство, что из метода С. Ли не следует регулярного алгоритма поиска общего решения уравнений 1-го порядка (для таких уравнений интегрирующую подстановку можно найти, но лишь в случае, когда допускаемый оператор известен заранее). Поэтому неудивительно, что достижения группового анализа в области интегрирования выглядели достаточно скромно. Подчеркнём — в области интегрирования, т. е. поиска точных решений в замкнутом виде. Возрождение группового анализа началось лишь в 1950 – 1960-х годах: методы Ли были применены для поиска решений уравнений с частными производными.

С точки зрения развития теории в конце XX века заслуживают упоминания теория операторов Ли – Беклунда, а также указания на необходимость рассмотрения экспоненциальных нелокальных операторов (ЭНО). Введение ЭНО представляется вполне естественным обобщением локальных операторов. Однако при этом мы неизбежно теряем ряд преимуществ группового анализа, причем чем выше уровень обобщения, тем больше.

1. Для точечных групп хорошо известен принцип подобия: всякая группа подходящим точечным преобразованием может быть переведена в любую наперед заданную точечную группу. Для ЭНО это не так, и для редукции уравнения, допускающего ЭНО, остается только один путь – факторизация.

2. Для нелокальных операторов, не являющихся ЭНО, ситу-

ация ещё сложнее: в ряде случае не удается найти даже первый дифференциальный инвариант (он может и не существовать). Это означает, что для редукции уравнений 2-го порядка такие операторы вообще бесполезны.

3. Хорошо известно, что локальные операторы, допускаемые дифференциальными уравнениями, образуют алгебру Ли. Для нелокальных операторов их множества не образуют алгебру Ли, так как в них не выполняется тождество Якоби.

4. Всякая допускаемая локальная группа переводит решение уравнения снова в решение того же уравнения. Для нелокальных операторов мы не можем найти преобразования группы, и это полезное свойство тоже теряется.

Можно констатировать выраженное "расслоение" симметричных методов: с одной стороны, это классический групповой анализ — законченная и продуктивная область математики, основанная на свойствах *локальных* непрерывных групп преобразований, с другой — новое развивающееся направление, ориентированное на приложения и базирующееся на общих свойствах декомпозируемых объектов. По существу, факторизация уравнений может быть найдена и без привлечения понятия инфинитезимального оператора.

Р. Р. Замалиев

Казань, zamrr@yandex.ru

ОБ ОДНОМ АППРОКСИМИРУЮЩЕМ ОПЕРАТОРЕ

Пусть $C \equiv C[-1,1]$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя [1], скажем что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\}$, если в точке