Теорема 2. *Разделяющая линия $\sigma(S_1, S_2)$ диаграммы Вороного множества $H^+{}_k(c_1) \cup H^-{}_k(c_2)$ совпадает с $\Gamma_k(c_1, c_2)$.*

Б. И. Голубов

Долгопрудный, golubov@mail.mipt.ru

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УОЛША, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПРОСТРАНСТВАМ L^p, $1 < p < 2$

1. Введение. Преобразование Фурье – Уолша было введено Н. Дж. Файном [1] в 1950 г. Оно обладает свойствами, аналогичными свойствам классического преобразования Фурье, которые наиболее полно изложены в книге Е. Титчмарша [2]. Например, для преобразования Фурье – Уолша $F(f) \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, справедливы формула обращения $F(F(f)) = f$ и равенство Планшереля $\|\tilde{f}\|_2 = \|f\|_2$, где $\|f\|_p$ — L^p-норма функции f на $\mathbb{R}_+$. Если же $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $\tilde{f} \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $\|\tilde{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$, где $1/p + 1/q = 1$ (см. [3], гл. 9). Последнее неравенство часто называется неравенством Хаусдорфа – Юнга, поскольку они доказали подобное неравенство для рядов Фурье. Н. Я. Виленкин [4] обобщил понятие преобразования Фурье на функции, заданные на нуль-мерной локально компактной абелевой группе. М. С. Беспалов (см. [5], [6]), пользуясь определением Н. Я. Виленкина мультипликативного преобразования Фурье, доказал для этого преобразования несколько теорем, аналогичных результатам для классического преобразования Фурье. Частично результаты из [5], [6] изложены в гл. 6 книги [7].

В данной работе приводятся достаточные условия на функцию, при которых ее преобразование Фурье – Уолша принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < 2$.

2. Основные определения и вспомогательные результаты. Для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod 2, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod 2, \tag{2.1}$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a, а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1.

Отметим, что x_{-n} (x_n) является n-м двоичным разрядом целой (дробной) части числа $x \in \mathbb{R}_+$. При этом двоично-рациональным числам $x \in \mathbb{R}_+$ сопоставляются конечные двоичные разложения.

Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geqslant n(x)$, то для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Ядро Уолша определяется для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi(x,y) = (-1)^{t(x,y)}. \tag{2.2}$$

Преобразование Фурье – Уолша $F(f) \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x,y) f(y)\, dy. \tag{2.3}$$

Если же $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, то $\tilde{f}$ определяется как предел по норме пространства $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, последовательности функций

$$\int_0^{2^n} f(y)\psi(x,y)\, dy, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для преобразований Фурье – Уолша справедливы следующие теоремы.

Теорема A. *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то существует* $\tilde{f} \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, *причем* $\|\tilde{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$.

Доказательство этой теоремы дано, например, в ([3], с. 427) и в ([8], с. 35).

Теорема B. *Если*

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^q x^{q-2}\, dx < \infty, \quad 2 < q < \infty,$$

то существует $\tilde{f} \in L^q(\mathbb{R}_+)$.

Эта теорема является частным случаем теоремы, доказанной М. С. Беспаловым для мультипликативных преобразований Фурье (см. [5] или [6]).

На $\mathbb{R}_+$ введем операцию двоичного сложения $\oplus$, положив $x \oplus y = z$ для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, где число z в двоичной системе счисления имеет двоичные разряды $z_n = x_n + y_n \pmod 2$, $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, а x_n, y_n вычисляются по правилу (2.1). Отметим, что

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n 2^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z_{-n},$$

причем случай $z_n = 1$ для $n \geqslant n(z)$ не исключается. Ядро Уолша (2.2) удовлетворяет равенству

$$\psi(x \oplus y, t) = \psi(x, t)\psi(y, t), \tag{2.4}$$

если t, x, $y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ двоично-иррационально.

Лемма 2.1. *Для* $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$ *и* $x > 0$ *определена функция*

$$W_n^{(\alpha)}(x) := \lim_{m \to +\infty} \int_{2^{-n}}^{2^m} \psi(x, y) y^{-\alpha}\, dy,$$

причем предел существует и в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$, *следовательно,* $W_n^{(\alpha)} \in L(\mathbb{R}_+)$.

Для $\alpha = 1$ утверждение этой леммы известно (см. [3], с. 434), а для $\alpha > 0$ она доказана в нашей работе [9].

Определим двоичную свертку функций

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)g(x \oplus y)\,dy, \quad f, g \in L(\mathbb{R}_+), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Известно, что $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$, $(f * g)\tilde{}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Двоичная свертка определена и в случае $f \in L^p(\mathbb{R}_+ +)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in L(\mathbb{R}_+)$, причем $f * g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $(f * g)\tilde{}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Определение 2.1. *Если* $\alpha > 0$ *и* $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant \leqslant p \leqslant \infty$, *причем* $\lim_{n \to +\infty} \|f * W_n^{(\alpha)} - g\|_p = 0$, *то функцию* $g = I^p_{(\alpha)}(f)$ *назовем сильным двоичным интегралом* (*СДИ*) *порядка* α *функции* f *в пространстве* $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Для $\alpha = 1$, $p = 1$ это определение введено Х. Й. Вагнером [10].

Лемма 2.2. *Пусть* $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *а функция* g *является СДИ порядка* $\alpha > 0$ *функции* f *в пространстве* $L^p(\mathbb{R}_+)$. *Тогда* $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)x^{-\alpha}$ *почти всюду на* $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что в случае $p = 1$ заключение леммы можно уточнить. В этом случае $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)x^{-\alpha}$ для $x > 0$, причем $\tilde{g}(0) = 0$. Это доказано Х.Й. Вагнером [10] в случае $p = 1$, $\alpha = 1$ (см. также [3], с. 435), а в случае $p = 1$, $\alpha > 0$ — автором [9].

Доказательство теоремы 3.2 (см. п. 3) опирается, в частности, на следующую теорему.

Теорема С. *Если функция f принадлежит пространству $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, то справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}_+} x^{p-2} |\tilde{f}(x)|^p \, dx \leqslant B_p \|f\|_p^p,$$

где постоянная B_p не зависит от функции f.

Эта теорема является частным случаем теоремы, которая сформулирована, но не доказана в работах М. С. Беспалова (см. [5], теорема 4) или ([6], теорема 3). Поэтому для полноты изложения мы даем другое доказательство этой теоремы. Предлагаемый нами метод доказательства теоремы С отличен от метода, упомянутого в работах [5] и [6] для доказательства более общей теоремы, относящейся к мультипликативным преобразованиям Фурье.

Ниже мы будем пользоваться для ядра Уолша (2.2) обозначением $\psi(x, y) = \psi_y(x)$. Доказательство теоремы С опирается на следующие леммы.

Лемма 2.3. *Система функций*

$$\left\{2^{-n/2} \psi_{m2^{-n}}(x) X_{[0,2^n)}(x)\right\}_{m=0}^{\infty} \equiv \{a_m(x)\}_{m=0}^{\infty} \qquad (2.5)$$

ортонормирована на $D_n = [0, 2^n)$ при любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}$.

Утверждение этой леммы хорошо известно (см., например, [8], гл. 1, предложение 5.1).

Через $\hat{f}_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим коэффициенты Фурье функции $f_n(x) = f(x) X_{D_n}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, по ортонормированной системе (2.5), т.е. положим

$$\hat{f}_n(k) = 2^{-n/2} \int_{D_n} f_n(t) \psi_{k2^{-n}}(t) \, dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \qquad (2.6)$$

Лемма 2.4. *Справедливы равенства*

$$\tilde{a}_{m,n}(x) = 2^{n/2} X_{[m2^{-n},(m+1)2^{-n})}(x),$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Утверждение этой леммы известно (см., например, [8], гл. 2, лемма 1.1).

Лемма 2.5. *Для любой функции* $f \in L^p(D_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, *подпоследовательность частных сумм* $\{S_{2^m}(f)\}_{m=0}^{\infty}$ *ее ряда Фурье по системе (2.5) сходится к* f *почти всюду на* D_n *и в метрике пространства* $L^p(D_n)$. *Более того, справедливо неравенство*

$$\|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_p \leqslant 2^{1/p}\omega_p(f, 2^{-m}),$$

где справа стоит интегральный модуль непрерывности функции f *в метрике пространства*

$$L^p(D_n) : \omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant \delta} \int_0^{2^n - u} |f(x+u) - f(x)|\, dx, \quad \delta \in D_n.$$

Лемма 2.6. *Если* $f \in L^p(D_n)$, $1 < p \leqslant 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *то для коэффициентов Фурье* (2.6) *функции* f_n *справедливо неравенство*

$$|\hat{f}_n(0)|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_n(k)|^p k^{p-2} \leqslant A_p 2^{(p/2-1)n} \|f\|^p_{L^p(D_n)},$$

где постоянная A_p *зависит только от* p.

3. Основные результаты. В формулируемых ниже теоремах 3.1 и 3.2 преобразование Фурье – Уолша определяется формулой (2.3), в которой интеграл считается несобственным с особой точкой $+\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть функция* $f(x)$ *не возрастает на* $\mathbb{R}_+$ *и* $f(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$. *Тогда интеграл в правой части равенства* (2.3) *сходится в каждой точке* $x > 0$, *а если* $f(x)x^{1-2/p} \in L^p(\mathbb{R}_+)$, *где* $1 < p < 2$, *то* $\tilde{f}(x)$ *принадлежит пространству* $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Эта теорема аналогична теореме Харди – Литтлвуда, относящейся к классическому преобразованию Фурье (см., например, [2], с. 150, теорема 82).

Следующую теорему можно считать двоичным аналогом теоремы Е. Титчмарша, относящейся к классическому преобразованию Фурье (см. [2], с. 152, теорема 83).

Теорема 3.2. *Пусть* $1 < p < 2$ *и функция* $\varphi \in L^p(\mathbb{R}_+)$ *имеет сильный двоичный интеграл* $I^p_{(2/p-1)}(\varphi) = f$. *Тогда* $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fine N. J. *The generalized Walsh functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 69. – P. 66–77.

2. Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье.* – М.: Гостехиздат, 1948.

3. Schipp F., Wade W. R., Simon P. *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis.* – Budapest: Akademiai Kiado, 1990. – 560 p.

4. Виленкин Н. Я. *К теории интегралов Фурье на топологических группах* // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30. – № 2. – С. 233-244.

5. Беспалов М. С. *Мультипликативные преобразования Фурье в* L^p. – М.: 1981. – 21 с. – Рук. деп. в ВИНИТИ, № 100-82.

6. Беспалов М. С. *Мультипликативные преобразования Фурье в* L^p // Теория функций и приближений. Тр. Саратовск. зимней шк., Ч. 2. – Саратов: Изд-во СГУ, 1983. – С. 39–42.

7. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша.* – М.: Изд-во URSS/ЛКИ, 2008. – 346 с.

8. Голубов Б. И. *Элементы двоичного анализа.* – М.: Изд-во URSS/ЛКИ, 2007. – 203 с.

9. Golubov B. I. *On some properties of fractional dyadic derivative and integral* // Analysis Math. – 2006. – V. 32. – No 3. – P. 173–205.

10. Wagner H. J. *On dyadic calculus for functions defined on* $\mathbb{R}_+$ // Proc. Symp. "Theory and applications of Walsh functions". – Hatfield Polytechnic, 1975. – P. 101–129.

Е. Г. Григорьева

Волгоград, e_grigoreva@mail.ru

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ СОБОЛЕВА В ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКЕ

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ — область и $\Phi(x,\xi) : D \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — неотрицательная непрерывная функция, однородная и выпуклая по переменной ξ. Предположим, что для $x \in D$ множества $\Xi(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^n \ : \ \Phi(x,\xi) \leqslant 1\}$ локально равномерно ограничены.

Обозначим через $H(x,\eta) = \sup_{\xi \in \Xi(x)} \langle \eta, \xi \rangle$ двойственную функцию для множества $\Xi(x)$.

Определим в D *финслерову метрику*

$$d(x,y) = \inf \int\limits_{\gamma} H(x,dx), \quad \forall x,\, y \in D,$$