Мы рассматриваем аналогичную задачу в классе функций $A(H, \Delta)$, где $H = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$. И в этом случае оценка четных производных оказывается весьма затруднительной. Для $n = 2$ справедливо следующее

Утверждение. *Пусть* $f \in A(H, \Delta)$. *Тогда*

$$|f''(z)| \leqslant \frac{81}{64|y|^2}, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad z \in H.$$

Равенство достигается для функций вида

$$f(\zeta) = e^{i\gamma} \frac{\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}}\right) - \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}}\right)^2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00381).

ЛИТЕРАТУРА

1. Szász O. *Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt* // Math. Z. – 1920. – No 8. – P. 303–309.

2. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz – Pick type inequalities.* – Boston – Berlin – Bern: Birkhäuser, 2009. – 156 p.

Д. А. Гоголь, В. А. Клячин

Волгоград, gosha_horoshiy@mail.ru

УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ СЕТОК

Пусть на плоскости R^2 заданы область D и набор точек $P = \{P_{ij}\}$, $P_{ij} \in D$, $i = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,n}$, образующий регулярную сетку, причем точки P_{0j}, P_{i0}, P_{mj}, $P_{in} \in \partial D$. Для каждой внутренней точки P_{ij} определим величину

$$d_{ij} = |P_{i+1j} - P_{ij}|^2 + |P_{i-1j} - P_{ij}|^2 + |P_{ij-1} - P_{ij}|^2 + |P_{ij+1} - P_{ij}|^2 .$$

Рассмотрим выпуклую положительную функцию $\varphi(t)$, $t > 0$, и найдем величину

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(d_{ij}).$$

Определение 1. *Сеть P, состоящую из точек $\{P_{ij}\}$, будем называть φ-минимальной регулярной сетью, если*

$$\Phi(P) = \min_{Q} \Phi(Q),$$

$$Q_{0j} = P_{0j},\ Q_{mj} = P_{mj},\ Q_{i0} = P_{i0},\ Q_{in} = P_{in}\ \forall i = \overline{0,m},\ j = \overline{0,n}.$$

Будем исследовать такие положения точек, чтобы $\Phi(P)$ принимала минимально возможное значение $\Phi(P) = \min_Q \Phi(Q)$.

Функцию $\Phi(P)$ можно рассматривать как функцию $2(m-1)(n-1)$ переменных координат этих точек $\Phi = \Phi(x_{ij}, y_{ij})$. Тогда условие минимума дает

Теорема 1. *Если сеть P φ-минимальна, то*

$$\begin{aligned}\varphi'(d_{ij})(8x_{ij} - 2(x_{i-1j} + x_{i+1j} + x_{ij-1} + x_{ij+1}))+ \\ + \varphi'(d_{i-1j})(2x_{ij} - 2x_{i-1j}) + \varphi'(d_{i+1j})(2x_{ij} - 2x_{i+1j})+ \\ + \varphi'(d_{ij-1})(2x_{ij} - 2x_{ij-1}) + \varphi'(d_{ij+1})(2x_{ij} - 2x_{ij+1}) = 0, \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(d_{ij})(8y_{ij} - 2(y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1}))+ \\ + \varphi'(d_{i-1j})(2y_{ij} - 2y_{i-1j}) + \varphi'(d_{i+1j})(2y_{ij} - 2y_{i+1j})+ \\ + \varphi'(d_{ij-1})(2y_{ij} - 2y_{ij-1}) + \varphi'(d_{ij+1})(2y_{ij} - 2y_{ij+1}) = 0. \quad (2)\end{aligned}$$

Определение 2. *Сеть P называется φ-экстремальной, если выполняются равенства* (1) *и* (2).

Определение 3. *Сеть P называется локально φ-минимальной, если*

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_{kl}^2} \right\| > 0.$$

Теорема 2. *Если сеть P — φ-экстремальная, то при условии*

$$\varphi''(t)\varphi'(t) + \frac{1}{4t}(\varphi'(t))^2 > 0$$

сеть P локально φ-минимальна.

Е. А. Грачева, В. А. Клячин

Волгоград, grachevaevg@mail.ru, klchnv@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ

Рассмотрим в области $D \subset R^n$ функцию $f(x)$ класса $C^2(D)$, такую, что

$$M_2 = \sup_D \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < +\infty, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} > 0.$$

Обозначим через L постоянную Липшица векторного поля $\nabla f(x)/|\nabla f(x)|$. Пусть $m_f = \inf_D f(x)$, $M_f = \sup_D f(x)$. Рассмотрим некоторое конечное значение $m_f < c < M_f$ и некоторую точку x^0, $f(x^0) = c$. Введем обозначение множества уровня $I^c = \{x \in D : f(x) = c\}$ функции $f(x)$. Рассмотрим последовательность конечных ε-сетей E^k с $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$.