2. Filippas S., Maz'ya V. G., Tertikas A. // *On a question of Brezis and Marcus* // Calc. Var. Part. Diff. Equat. – 2006. – V. 25. – P. 491–501.

3. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. – 2007. – V. 87. – No 8–9. – P. 632–642.

А. Ф. Галимянов

Казань, anis_59@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Данная работа посвящена приближенным методам решения интегро-операторного уравнения

$$A\overline{\varphi} \equiv \gamma + I_0^\alpha(\varphi;t) + T(\varphi;t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \qquad (1)$$

здесь γ — искомый параметр, $\varphi(t)$ — искомая функция, $I_0^\alpha(\varphi;t)$ — дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ от функции $\varphi(t)$ (см., например, [1]), $f(t)$ — заданная непрерывная функция, T — заданный линейный (в том числе интегральный) оператор.

Введем пространство вектор-функций $\overline{\varphi} = (\gamma, \varphi)$, где $\gamma \in R$, $\varphi \in C$, с нормой $\|\overline{\varphi}\| = |\gamma| + \|\varphi\|_C$; $C^\alpha = C^\alpha[0,1]$ — пространство всех дробно-дифференцируемых порядка α на $[0,1]$ функций с нормой

$$\|f\|_{C^\alpha} = |f(0)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |D^\alpha(f;t)|,$$

где $D^\alpha(f;t)$ — производная Римана – Лиувилля от функции $f(t)$ порядка $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Поскольку рассматриваемое уравнение, как правило, точно не решается, желательно разработать приближенные методы решения с соответствующим теоретическим обоснованием. В работе для уравнения (1) предлагается метод коллокации (см., например, [2]) со специальным выбором узлов.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде вектор-функции $\overline{\varphi}_n(t) = (\gamma_n, \varphi_n(t)) \in \bar{C}$, где $\gamma_n \in R$ и

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k t^{k-1}, \quad c_k \in R, \quad n \in N.$$

Неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_{k=1}^{n}$ определим из условий $A(\bar{\varphi}_n; t_j) = f(t_j)$, $j = \overline{0,n}$, где $\{t_j\}_0^n$ — некоторая система узлов из $[0,1]$. Имеет место

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *однозначно разрешимо при любой правой части* $f \in C^\alpha$, *узлы коллокации выбраны по формуле* $t_j = \cos^2(j\pi/2n)$, $j = \overline{0,n}$; *выполняются условия* $D^\alpha(T(\varphi;t)) \in Lip_M\beta$, $D^\alpha(f(t)) \in Lip_M\beta$. *Тогда система уравнений метода коллокации однозначно разрешима при достаточно больших* n *и приближенные решения* $\overline{\varphi}_n^*(t)$, *полученные этим методом, сходятся к точному решению* $\overline{\varphi}^*(t)$ *со скоростью*

$$\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_{\bar{C}} = O\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения.* – Минск: Наука и техника, 1985. – 885 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 288 с.