2. Выгодчикова И. Ю. О задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом с ограничением // Тез. докл. Воронежск. зимн. матем. школы "Совр. методы теории функций и смежн. проблемы". – Воронеж, 2009. – С. 39–40.

Н. С. Габбасов, Р. Р. Замалиев

Набережные Челны, Казань, zamrr@yandex.ru

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА С ФИКСИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода с фиксированными особенностями в ядре (УТРФО)

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j}+ \\ +\int_{-1}^{1}K(t,s)\left[(s+1)^{p_1}(1-s)^{p_2}\right]^{-1}x(s)ds=y(t), \quad (1)$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j=\overline{1,l})$; p_1, $p_2 \in \mathbb{R}^+$ $+$, K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, x — искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Исследуемые уравнения находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях. При этом естественными классами решений УТР, как правило, являются специальные пространства обобщенных функций. УТРФО вида (1) впервые исследовано в работе [1], где установлена его фредгольмовость.

В настоящей заметке на базе рассуждений и результатов работ [2], [3] указан метод отыскания точного решения уравнения (1) в некотором пространстве X обобщенных функций, найдены достаточные условия непрерывной обратимости оператора A. Более того, разработаны прямые проекционные методы, специально приспособленные для приближенного решения УТРФО (1) в классе X, и дано их обоснование в смысле монографии [4]. В виде иллюстрации приведем лишь некоторые результаты по разрешимости уравнения (1).

Пусть $C \equiv C(I)$ — пространство непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Следуя [5], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t = 0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m. Далее, пусть $p \in \mathbb{R}^+$ и $g \in C$. Следуя также [5], будем говорить, что $g \in C\{p;1\}$, если существуют левые тейлоровские производные $g^{\{j\}}(1)$ $(j = \overline{1,[p]})$ в точке $t = 1$, причем при $p \neq [p]$ ($[\cdot]$ – целая часть) существует

$$\lim_{t\to 1-}\left\{[g(t) - \sum_{j=0}^{[p]} g^{\{j\}}(1)\frac{(t-1)^j}{j!}](1-t)^{-p}\right\}.$$

Теперь образуем основное пространство

$$Y \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}}(I) \equiv \{y \in C\{m;0\} | Ty \in C\{p;1\}\},$$

где $T : C\{m;0\} \to C$ — "характеристический" оператор класса $C\{m;0\}$ (см., например, [2]).

Рассмотрим на основном пространстве Y семейство $X \equiv D^{\{p\}}\{m;0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t),$$

где $t \in I$, $z \in C\{p;1\}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно дельта-функция Дирака и ее "тейлоровские" производные (см., например, [2]). По соответствующим нормам векторные пространства Y и X являются банаховыми.

В УТРФО (1) для простоты выкладок и формулировок будем считать $l = 1$, $t_1 = 0$, $p_1 = 0$, т. е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + (Kx)(t) = y(t), \tag{2}$$

$$Kx \equiv \int_{-1}^{1} K(t,s)(1-s)^{-p} x(s)ds \quad (t \in I),$$

где $y \in Y$, функция $K(t,s)$ удовлетворяет условиям фредгольмовости оператора A [1], а $x \in X$ — искомая обобщенная функция. Ради удобства введем обозначения:

$$\Psi_i(t) \equiv \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} K_s^{\{l\}}(t,0) \prod_{k=0}^{i-l-1} (p+k) \quad (i = \overline{0, m-1});$$

$Q \equiv E - KRT$, где $R : C\{p;1\} \to C\{p;1\}$ — разрешающий оператор уравнения второго рода с ядром

$$\widetilde{K}(t,s) \equiv (T_t K)(t,s)(1-s)^{-p},$$

а E — единичный оператор в Y.

Теорема. *Пусть*

i) *ядро K в УТРФО* (2) *удовлетворяет указанным выше условиям, а $y \in Y$;*

ii) *число $\mu = -1$ не является собственным значением ядра $\widetilde{K}$;*

iii) *определитель линейной системы*

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i (Q\Psi_i)^{\{j\}}(0) = (Qy)^{\{j\}}(0) \quad (j = \overline{0, m-1}) \tag{3}$$

с неизвестными $\{\omega_i\}$ *отличен от нуля.*

Тогда при любой правой части $y \in Y$ *УТРФО* (2) *допускает единственное обобщенное решение* $x^* \in X$, *которое дается формулой*

$$x^*(t) = (RTy)(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i^*(RT\Psi_i)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i^* \delta^{\{i\}}(t),$$

где $\{\omega_i^*\}$ *— единственное решение системы* (3).

Следствие. *В условиях теоремы интегральный оператор* $A : X \to Y$, *определенный равенством* (2), *непрерывно обратим.*

Приведенный результат существенно используется при приближенном решении УТРФО (1) в пространстве X обобщенных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габбасов Н. С., Замалиев Р. Р. *Об интегральном уравнении третьего рода с фиксированными особенностями в ядре* // Материалы респ. научн.-прак. конф. "Наука, технол. и коммуник. в совр. обществе". – Наб. Челны, 2009. – Т. 2. – С. 41–44.

2. Габбасов Н. С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 176 с.

3. Габбасов Н. С. *Методы решения линейного интегрального уравнения с ядром, имеющим неподвижные особенности* // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 5. – С. 12–20.

4. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

5. Пресcдорф З. *Сингулярные интегральные уравнения с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек* // Матем. иссл. – 1972. – Т. 7. – № 1. – С. 116–132.