**И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева**

*Москва, i.bloshn@g23.relcom.ru, ov-lifantseva@yandex.ru*

# ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ С “ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ”

Пусть $M = \{1,2,\dots,N\}$, $N \geqslant 3$, $J_k = \{j_1,\dots,j_k\} \subset \subset M$, $j_1 < \dots < j_k$ при $1 \leqslant k \leqslant N-2$ или $J_k = \emptyset$ при $k = 0$, и пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+{}^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1,\dots,k$. Символом $n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1,\dots,n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ обозначим $N$-мерный вектор, у которого компоненты $n_j$ с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j = n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)} \geqslant q > 1$, $\lambda_j = 1,2,\dots$).

Далее, пусть $\Omega[J_2]$, $\Omega[J_2] \subset \mathbb{T}[J_2]$, — произвольное (непустое) открытое множество, $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$, здесь $\mathbb{T}[J_s] = \{(x_{j_1},\dots,x_{j_s}) : -\pi \leqslant x_{j_\nu} \leqslant \pi, \nu = 1,\dots,s\} \subset \mathbb{T}^N = [-\pi,\pi]^N$. Положим

$$W = W(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M\setminus J_k} W[J_2], \quad W^0 = W^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M\setminus J_k} W[J_2]$$

(при этом предполагаем, что $W^0 \neq \emptyset$).

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geqslant 3$, $\mu\mathfrak{A} > 0$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, или $J_k = \emptyset$, $k = 0$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$, такое, что $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$.

Как было показано в [1], достаточным условием сходимости почти всюду (п. в.) на некотором множестве $\mathfrak{A}_0 \subset \mathbb{T}^N$,

$N \geqslant 3$, $\mu\mathfrak{A}_0 > 0$, суммируемого по прямоугольникам кратного ряда Фурье (функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$) с "лакунарной последовательностью частичных сумм", $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$, $0 \leqslant k \leqslant N-2$, является равенство нулю функции $f$ на таких множествах $\mathfrak{A}$ из $\mathbb{T}^N$, которые обладают свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ и для которых $\mu(\mathfrak{A}_0 \setminus W^0(J_k)) = 0$.

Еще одним условием, гарантирующим сходимость п.в. на $\mathfrak{A}_0$ рассматриваемых рядов Фурье, могут быть некоторые "локальные условия гладкости" разлагаемой в ряд функции на множествах, "содержащих п. в." $\mathfrak{A}_0$ (подробнее см., например, для $N \geqslant 2$ — [2], [3], для $N = 1$ — [4], с. 350–354). В настоящей работе мы указываем следующее условие такого рода.

**Теорема.** *Пусть $\mathfrak{A}_0 \subset \mathbb{T}^N$, $N \geqslant 3$, $\mu\mathfrak{A}_0 > 0$. Если существует измеримое множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, обладающее свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ для некоторого $J_k$, $0 \leqslant k \leqslant N-2$, такое, что $\mu(\mathfrak{A}_0 \setminus W^0(J_k)) = 0$, то для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{A}) \cap L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, где*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{A}) = \{f \in L_2(\mathfrak{A}) :$$

$$\sum_m \Big(\frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathfrak{A}} f(x) e^{-imx} dx\Big)^2 \cdot \prod_{j=1}^{N} \ln(|m_j| + 2) < +\infty\},$$

*справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k; \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = f(x) \ \text{для почти всех} \ x \in \mathfrak{A}_0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00669).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Блошанский И. Л., Лифанцева О. В. // Докл. РАН. – 2008. – Т. 423. – № 4 – С. 1–4.

2. Блошанский И. Л. // Теория функций и приближений. Тр. 5-й Сарат. зимн. шк. – Саратов, 1992. – С. 150–155.

3. Блошанская С. К., Блошанский И. Л. // Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer Book Series. Vol. "Wavelet Analysis and Applications". – Switzerland: Birkhauser Verlag, Basel, 2007. – P. 13–24.

4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз. – 1961.



**П. А. Бородин**

*Москва, pborodin@inbox.ru*


# О ПРИБЛИЖЕНИИ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ

Наипростейшей дробью называется рациональная функция вида

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аппроксимации наипростейшими дробями стали изучаться по инициативе Е. П. Долженко. Приведем некоторые результаты качественного характера.

Наипростейшие дроби с полюсами вне компакта $K \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением плотны в пространстве $AC(K)$ функций, непрерывных на $K$ и аналитических в его внутренних точках [1]. Наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси $\mathbb{R}$ плотны в пространстве $C_0(\mathbb{R})$ [2], но, как следует