В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович

Днепропетровск, babenko.vladislav@gmail.com,
nparfinovich@yandex.ru

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ ДЕФЕКТА 2 И НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА

Пусть L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$, C^r $(r = 0, 1, \ldots)$ — пространство r раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $r = 0$) 2π-периодических функций.

Если $f \in L_p$ и α, β — положительные числа, то положим

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p,$$

где $f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Пусть $M \subset L_p$ — некоторый класс функций. Величина

$$E(M, H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_{p;\alpha,\beta}$$

называется наилучшим (α, β)-приближением класса M множеством H в метрике L_p.

Через L_p^r, $r = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим множество 2π-периодических функций, у которых $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} := f)$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_p$; через W_p^r — класс функций $f \in L_p^r$, у которых $\|f\|_p \leqslant 1$.

Для натуральных n и m через $S_{2n,m}^2$ будем обозначать пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 2 с узлами в точках $2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi_{n,m}(\alpha,\beta;t)$ $(\alpha,\beta > 0,\ \lambda > 0,\ m \in \mathbb{N})$ есть $2\pi/n$-периодический интеграл порядка m с нулевым средним значением на периоде от четной $2\pi/n$-периодической функции $\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;t)$, которая для $t \in [0,\pi/n)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)}, \\ -\beta, & \frac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)} < t \leqslant \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть n, r, $m \in N$, $m \geqslant r$, α, $\beta > 0$. Тогда*

$$E(W_1^r, S_{2n,m}^2)_{1;\alpha,\beta} = \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{n^r},$$

где $E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)$ подпространством констант.

Из теоремы при $\alpha = \beta = 1$ получаем наилучшие, а при $\max\{\alpha,\beta\} = \infty$, $\min\{\alpha,\beta\} = 1$ — наилучшие односторонние приближения классов W_1^r подпространствами $S_{2n,m}^2$ в пространстве L_1. Кроме того, с помощью этой теоремы и некоторых результатов А. А. Лигуна устанавливаем новые точные неравенства типа Джексона для наилучших и наилучших односторонних L_1-приближений функций из L_1^r и C^r подпространствами $S_{2n,m}^2$.