4. Чермных В. В. *Полукольца: учебное пособие.* – Киров: ВятГГУ, 1997. – 131 с.

5. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир., 1986. – 451 с.

6. Gillman L., Jerison M. *Rings of continuous functions.* – N. J.: Springer-Verlag., 1976. – 300 p.

7. Vechtomov E. M. *Rings of continuous functions with values in topologicals division ring* // J. Math. Sciences. – 1996. – V. 78. – No 6. – P. 702-753.

Г. Р. Юнусова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ggg-ggg@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | \ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа.

Нелокальная задача. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+); \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$(u_t - h_1 u)|_{t=-\alpha} - (u_t - h_2 u)|_{t=\beta} = \omega(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где h_1 *и* h_2 *— заданные положительные числа,* $\omega(x)$ *— заданная достаточно гладкая функция, причем* $\omega(0) = \omega(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Отметим, что краевые задачи с нелокальными граничными условиями изучались в работах [1 – 5] и других. В работе [6] для уравнения (1) в прямоугольной области D изучена начально-граничная задача, в которой вместо условия (5) задано начальное условие $u(x, -\alpha) = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ниже на основании этой работы установлен критерий единственности решения нелокальной задачи (2) – (5). При этом само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи Штурма – Лиувилля. По аналогии с работой [5] установлена устойчивость решения по нелокальному условию (5) в нормах пространств $L_2[0,1]$ и $C(\overline{D})$.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) - (5), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнено условие*

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \lambda_k(1-h_1)\sin\lambda_k\alpha - (\lambda_k^2 + h_1)\cos\lambda_k\alpha + (\lambda_k^2 + h_2)e^{-\lambda_k^2\beta} \neq 0. \tag{6}$$

Если при некоторых α, β, h_1, h_2 и $k = p$ нарушено условие (6), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$, то однородная задача (2) – (5) (где $\omega(x) \equiv \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t}\sin(\pi p x), & t > 0, \\ [\cos(\lambda_p t) - \lambda_p \sin(\lambda_p t)]\sin(\pi p x), & t < 0. \end{cases}$$

При выполнении условий (6) решение задачи (2) — (5) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin \pi k x, \tag{7}$$

где $u_k(t)$ определяются по формуле

$$u_k(t) = \begin{cases} \omega_k \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k) e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \omega_k \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)[\cos(\lambda_k t) - \lambda_k \sin(\lambda_k t)], & t < 0. \end{cases}$$

Лемма. *Если α — любое натуральное число, $h_1 = h_2 = h$ или $h_1 = h$, $h_2 = -h$, то при любом фиксированном $\beta > 0$ при больших k существует положительная постоянная C_0, такая, что справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geqslant C_0 k^2 > 0. \tag{8}$$

Теорема 2. *Если $\omega(x) \in C^2[0,1]$, $\omega(0) = \omega(1) = 0$ и выполнены условия* (6) *и* (8), *то существует единственное решение задачи* (2) – (5), *и оно определяется рядом* (7).

Пусть

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} = \|u\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |u(x,t)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|\omega(x)\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |\omega(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_\pm)} = \max_{\overline{D}_\pm} |u(x,t)|.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для решения задачи* (2) – (5) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|\omega(x)\|_{L_2}, \ \|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_2 \|\omega(x)\|_{L_2},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от $\omega(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уклонения* // ПММ. – 1956. – Т. 20. – № 2. – С. 196-202.

2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // ДАН. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739-740.

3. Жегалов В. И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии* // Учен.зап. Казан. ун-та. 1962. – Т. 122, Кн. 3. – С. 3-16.

4. Нахушев А. М. *О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 1. – С. 44-59.

5. Ионкин Н. И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 2. – С. 296-304.

6. Сабитов К. Б. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, Вып. 2. – С. 273-279.