

И. А. Хаджи

Стерлитамакская государственная педагогическая академия,

khadzhi_irina@mail.ru

О КОРРЕКТНОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева — Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgny} \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x) \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, b — заданные положительные числа, и следующую краевую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L[0, 1]; \quad (3)$$

$$Lu(x, y) \equiv f(x), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где φ, ψ и g — заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0, \varphi(0) = \varphi(1) = 0, D_+ = D \cap \{y > 0\}, D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучены многими авторами

[1 – 5]. В работах [6 – 9] начато изучение обратных краевых задач для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. Обратная задача (2) – (7) при $b = 0$ изучена в работе [10]. В данной работе при всех $b > 0$ установлены необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи (2) – (7), решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи и доказана устойчивость решения по граничным данным в пространствах W_2^n и $C(\bar{D})$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x, y)$ и $f(x)$ задачи (2) – (7), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta + 1 \neq 0, \quad (8)$$

где $\lambda_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2}$.

Лемма. *Если выполнено одно из следующих условий:*

1) $\alpha = p$ – натуральное; 2) $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$, то существует постоянная $C_0 > 0$, вообще говоря, зависящая от α , такая, что при больших k и любых $\beta > 0$ справедлива оценка

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{\pi k \beta} > 0. \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0, 1]$ и удовлетворяют условиям $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, а функция $g(x) \in C^2[0, 1]$ и $g(0) = g(1) = 0$, а также выполнены условия (8), (9). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (7), где функции $u(x, y)$ и $f(x)$ определяются рядами

$$u(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin(\lambda_k x),$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(\lambda_k x),$$

$$u_k(y) = a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_k}{\lambda_k^2}, \quad y > 0,$$

$$u_k(y) = a_k [\cos(\lambda_k y) + \sin(\lambda_k y)] + \\ + b_k [\cos(\lambda_k y) - \sin(\lambda_k y)] - \frac{f_k}{\lambda_k^2}, \quad y < 0.$$

$$a_k = \frac{(\varphi_k - \psi_k) [\sin(\lambda_k \alpha) - \cos(\lambda_k \alpha)] + \\ + \frac{g_k}{\lambda_k} [\sin(\lambda_k \alpha) + \cos(\lambda_k \alpha) - e^{-\lambda_k \beta}]}{2\delta_{\alpha\beta}(k)},$$

$$b_k = \frac{(\psi_k - \varphi_k) [\sin(\lambda_k \alpha) + \cos(\lambda_k \alpha)] + \\ + \frac{g_k}{\lambda_k} [\sin(\lambda_k \alpha) - \cos(\lambda_k \alpha) + e^{\lambda_k \beta}]}{2\delta_{\alpha\beta}(k)},$$

$$f_k = \lambda_k^2 \frac{-\varphi_k - \psi_k (\delta_{\alpha\beta}(k) - 1)}{\delta_{\alpha\beta}(k)} + \\ + \lambda_k^2 \frac{\frac{g_k}{\lambda_k} [\cos(\lambda_k \alpha) \operatorname{sh}(\lambda_k \beta) + \sin(\lambda_k \alpha) \operatorname{ch}(\lambda_k \beta)]}{\delta_{\alpha\beta}(k)}.$$

Пусть

$$\|u(x, y)\|_{L_2(0,1)} = \|u(x, y)\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |u(x, y)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} = \max_{\bar{D}} |u(x, y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n |f^k(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (2) – (7) имеют место оценки:

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_1 (\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}),$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \leq C_2 (\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}),$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq C_3 (\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \leq C_4 (\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}),$$

где постоянные C_i не зависят от $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН. – 1943. – Т. 39. – № 5. – С. 195-198.
2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
3. Романов В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнения гиперболического типа. – Новосибирск: Наука, 1972. – 236 с.
4. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

5. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач*. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

6. Сабитов К. Б. *Критерий единственности решения краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа* // Тр. межд. науч. конф. “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы,” посв. юбилею академика В.А. Ильина. – Уфа: Гилем, 2008. – Т. 2. – С. 154-161.

7. Сабитов К. Б. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 27. – № 5. – С. 593-596.

8. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 4. – С. 55-62.

9. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Матем. заметки. – 2010. – № 6. – С. 901-912.

10. Сабитов К. Б., Хаджи И. А. *Краевая задача для уравнения Лаурентьева – Бицадзе с неизвестной правой частью* // Изв. вузов. Математика. – 2010 (принята в печать).