3. Abanin A. V., Pham Trong Tien. *Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some its applications* // Studia Math. (принята к печати).

**Ю. С. Федяев**

*Орловский государственный университет,*

*fedyaevys@gmail.com*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА “РАЗНОЦВЕТНЫХ” ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В работе исследуется стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды (грунте) постоянной толщины $H = 1$ с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты тензора проницаемости слоя — постоянные величины. Течение жидкости описывают обобщённый потенциал $\varphi$ и функция тока $\psi$. Они являются функциями декартовых координат $x$, $y$, времени $t$ ($t$ — параметр) и удовлетворяют всюду в области фильтрации $\mathcal{D}$ (за исключением особых точек течения) системе уравнений [1]

$$K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1)$$

Уравнения (1) записаны в безразмерных величинах. Система уравнений (1) относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0, \quad D_s = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2}\right)^2 > 0, \qquad (2)$$

где $D_s$ — определитель симметричной части этого тензора.

В области фильтрации $\mathcal{D}$ присутствует граница $\Gamma_t$, которая разделяет жидкости постоянных вязкости и плотности. Воспользуемся моделью "разноцветных" жидкостей [2], согласно которой физические свойства жидкостей (вязкость, плотность) одинаковы. Граница $\Gamma_t$ представляет собой "отмеченные" частицы жидкости. Положение границы $\Gamma_t$ в плоскости $z = x+iy$ в любой момент времени $t > 0$ задаём параметрическим уравнением ($s$ — параметр)

$$z = z(t, s), \quad z \in \Gamma_t. \tag{3}$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы $\Gamma_t$ известно:

$$z_0 = z(0, s), \quad z_0 \in \Gamma_0. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение движения границы $\Gamma_t$ имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = v(z, t), \quad z \in \Gamma_t. \tag{5}$$

Здесь $v(z,t) = v_x(z,t) + iv_y(z,t)$ — скорость фильтрации, компоненты $v_x$ и $v_y$ которой определяют первое и второе уравнения (1) соответственно.

Задача эволюции границы $\Gamma_t$ ставится в плоскости $z$ (физической плоскости) следующим образом. Заданы положение границы $\Gamma_0$ и тензор проницаемости $K$. Необходимо найти положение границы $\Gamma_t$ (3) при $t > 0$. Решение этой задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (5) при начальном условии (4).

Поставленная задача эволюции границы раздела жидкостей исследуется на вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ [1]. Это позволяет значительно упростить систему уравнений (1), приведя её к каноническому виду. На плоскости $\zeta$ течение происходит в области $\mathcal{D}'$ и характеризуется обобщённым потенциалом $\varphi(\zeta,t)$ и функцией тока $\psi(\zeta,t)$. Область $\mathcal{D}'$ связана с областью $\mathcal{D}$ гомеоморфным преобразованием

$$\zeta = z + \mu\bar{z} \quad \left(z = \frac{\zeta - \mu\bar{\zeta}}{1-|\mu|^2}\right). \tag{6}$$

Здесь $\mu = [K_{22} - K_{11} - i(K_{12}+K_{21})]/(K_{22}+K_{11}+2\sqrt{D_s})$ — комплексная константа. Согласно (2) имеем $|\mu|<1$.

На вспомогательной плоскости $\zeta$ уравнения (1) принимают канонический вид

$$\sqrt{D_s}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad -\sqrt{D_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \sqrt{D_s}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}. \tag{7}$$

Здесь $D_a = [(K_{12}-K_{21})/2]^2$ — определитель антисимметричной части тензора проницаемости. Первое и второе уравнения системы (7) определяют $v_\xi$ и $v_\eta$ — составляющие вектора скорости фильтрации $v(\zeta,t) = v_\xi(\zeta,t) + iv_\eta(\zeta,t)$ в плоскости $\zeta$.

Используя гомеоморфизм (6), запишем уравнения (3) и (4) в плоскости $\zeta$ в виде

$$\zeta = \zeta(t,s), \quad \zeta\in\Gamma'_t, \tag{8}$$

$$\zeta_0 = \zeta(0,s), \quad \zeta_0\in\Gamma'_0, \tag{9}$$

где $\Gamma'_t$ и $\Gamma'_0$ — образы границ $\Gamma_t$ и $\Gamma_0$. Дифференциальное уравнение (5) движения границы $\Gamma'_t$ в плоскости $\zeta$ имеет вид [3]

$$\frac{d\zeta}{dt} = (1-|\mu|^2)v(\zeta,t), \quad \zeta\in\Gamma'_t. \tag{10}$$

Таким образом, исследование эволюции границы раздела "разноцветных" жидкостей в случае анизотропного однородного слоя пористой среды сводится к решению системы уравнений (7), (10) при начальном условии (9). После того, как решена задача на плоскости $\zeta$, используя преобразование (6), находим её решение в физической плоскости $z$.

Построим численный алгоритм решения поставленной задачи. Фундаментальные решения уравнений (7) известны [4]. С их помощью можно моделировать работу эксплуатационных и нагнетательных скважин в области фильтрации. Численно решим уравнение (10) при начальном условии (9).

Пусть положение границы $\Gamma'_t$ в каждый момент времени $t_p$, $p = 0, 1, \ldots$, задаётся множеством точек $M_i^p$, $i = 1, 2, \ldots, m$, координаты которых обозначим $E^p_{\Gamma'_t} = \{\zeta_i^p\}$. Тогда начальное условие (9) примет вид

$$\Gamma'_0 : \{\zeta_i^0, i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{11}$$

Полагаем, что точки $M_i^0$ разбивают границу $\Gamma'_0$ равномерно по длине на $m$ частей.

Дифференциальное уравнение движения границы (10) аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{\zeta_i^{p+1} - \zeta_i^p}{\Delta t_{p+1}} = (1 - |\mu|^2) v(\zeta_i^p, t_p), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

Здесь $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$, $p = 0, 1, \ldots$ .

Решив уравнение (12) с начальным условием (11) при $p = 0$, находим положение границы $\Gamma'_t$ в момент времени $t_1$. Повторяя предложенный алгоритм для $p = 1, 2, \ldots$, находим положение границы $\Gamma'_t$ в последующие моменты времени $t_p$. Используя преобразование (6), получаем положения границы $\Gamma_t$ на физической плоскости $z$ в соответствующие моменты времени.

Предложенный метод позволил исследовать широкий класс задач эволюции границы раздела "разноцветных" жидкостей в анизотропном однородном слое пористой среды. В случае работы одиночной эксплуатационной скважины аналитически получена формула для времени достижения границей контура скважины [3]. Исследовано влияние анизотропии слоя и первоначального положения границы раздела жидкостей на её движение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В. Ф. *Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в анизотропном слое пористой среды* // Тр. Межд. школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики". – Орёл: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2009. – Вып. 7. – С. 81-91.

2. Голубева О. В. *Курс механики сплошных сред.* – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.

3. Пивень В. Ф., Федяев Ю. С. *Математическое моделирование эволюции границы раздела "разноцветных" жидкостей в анизотропном однородном слое пористой среды* // Учёные записки Орловского гос. ун-та. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2010. – № 2 (36). – С. 49-55.

4. Пивень В. Ф. *Фундаментальные решения уравнений двумерной фильтрации в анизотропном слое пористой среды* // Тр. Межд. школ-семинаров "Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики". – Орёл: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2008. – Вып. 6. – С. 86-94.