Фам Чонг Тиен

Южный федеральный университет,

phamtien@mail.ru

ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ С ОЦЕНКАМИ РОСТА

В настоящей работе найдены достаточные условия для продолжения голоморфных функций с комплексной плоскости во все пространство с согласованными оценками роста. Полученный результат обобщает известные результаты Л. Хермандера и Р. С. Юлмухаметова. С его помощью строятся играющие важную роль в ряде вопросов комплексного анализа и его приложений семейства целых функций с близкими друг к другу (в некотором смысле) оценками снизу и сверху.

Невозрастающую C^1-функцию $\rho : [0, \infty) \to (0, 1]$ будем называть *регулярной функцией расстояния*, если

$$\rho'(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \quad \text{и} \quad \ln \rho(e^x) \text{ вогнута на } \mathbb{R}.$$

Примерами регулярных функций расстояния являются:

$$\rho(t) = 1; \quad \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s}, \ s > 0; \quad \rho(t) = e^{-at^s}, \ a > 0, \ s > 0.$$

В дальнейшем будут использованы следующие постоянные, которые зависят только от ρ:

$$A_0 := \max_{t \in [0,\infty)} |\rho'(t)| < \infty,$$

$B_0 > 1 : \rho(t) \leqslant B_0 \rho(t')$ и $\rho(t') \leqslant B_0 \rho(t), \forall t,\ t' \geqslant 0$ с $|t - t'| \leqslant \rho(t)$.

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$ для $z \in \mathbb{C}^p$ $(p \in \mathbb{N})$. Заметим, что функция $-\log \rho(z)$ является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^p$. Будем говорить, что функция φ является ρ-медленно меняющейся в $\mathbb{C}^p$, если существует $C_0 \in [0, \infty)$, такое, что

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leqslant C_0 \text{ для всех } z, \zeta \in \mathbb{C}^p \text{ с } |z - \zeta| \leqslant \rho(z). \tag{1}$$

Главным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть ρ — регулярная функция расстояния, φ — ρ-медленно меняющаяся плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$ и C_0 - константа из условия (1). Тогда для всякой комплексной плоскости Σ в $\mathbb{C}^p$ размерности k и голоморфной функции f на Σ с условием*

$$\ln |f(z)| \leqslant \varphi(z) \quad (z \in \Sigma)$$

существует целая функция F в $\mathbb{C}^p$, такая, что $F|_\Sigma = f$ и

$$\ln |F(z)| \leqslant \varphi(z) + (2p - k) \ln \frac{1}{\rho(z)} + \frac{3p - 2k + 1}{2} \ln(1 + |z|^2) +$$

$$+ \frac{p-k}{2} \ln(1 + d_\Sigma^2) + M, \quad \forall z \in \mathbb{C}^p,$$

где d_Σ — расстояние от начала координат до Σ и M — абсолютная константа, которая зависит от A_0, B_0, C_0, p, k и не зависит от φ, Σ, f, ρ.

Замечание. 1) Если Σ — подпространство в $\mathbb{C}^p$ и $\rho(t) \equiv 1$ на $[0, \infty)$, то из теоремы 1 следует результат Л. Хермандера [1, теорема 4.4.3], а если $\rho(t) = \dfrac{1}{(1+t)^s}$, $s > 0$, то получим результат Р. С. Юлмухаметова [2, лемма 1].

2) Если комплексная плоскость Σ размерности k в теореме 1 задается следующей системой

$$\begin{cases} z_{k+1} = c_{k+1} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ z_p = c_p \, , \end{cases}$$

то вместо регулярной функции расстояния можно рассмотреть более общую функцию вида $\rho(z) := \rho(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_p|), z \in \mathbb{C}^p$, при C^1-функции $\rho : [0, \infty)^p \longmapsto (0, 1]$, которая не возрастает по каждой переменной и удовлетворяет следующим условиям: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t_j}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ $(j = \overline{1,p})$; $\ln \rho(e^{x_1}, \ldots, e^{x_p})$ вогнута на $\mathbb{R}^p$.

С помощью теоремы 1 можно строить семейства целых функций многих переменных, удовлетворяющие близким друг к другу равномерным оценкам сверху и локальным — снизу. Такие семейства играют важную роль во многих вопросах анализа. Именно, справедлив следующий общий результат.

Теорема 2. *Пусть ρ, φ и C_0 те же, что и в теореме 1. Тогда существует семейство $\mathcal{G} = \{g_\xi : \xi \in \mathbb{C}^p\}$ целых функций в $\mathbb{C}^p$, таких, что выполняются следующие условия:*

$$g_\xi(\xi) = \rho(\xi) e^{\varphi(\xi)}, \ \forall \xi \in \mathbb{C}^p,$$

$$|g_\xi(z)| \leqslant \frac{M}{\rho^{2p}(z)} (1 + |z|^2)^{3p+1} e^{\varphi(z)} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}^p,$$

где постоянная M зависит только от A_0, B_0 и C_0.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 получены совместно с А. В. Абаниным и будут опубликованы в [3], а результат, отмеченный в замечании (см. пункт 2)) и касающийся более общей функции расстояния $\rho(z) := \rho(|z_1|, |z_2|, ..., |z_p|), z \in \in \mathbb{C}^p$, установлен автором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. *Введение в теории функций нескольких комплексных переменных.* – М.: Мир, 1967. – 280 с.

2. Юлмухаметов Р. С. *Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности* // Известия РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – № 4. – С. 206-224.

3. Abanin A. V., Pham Trong Tien. *Continuation of holomorphic functions with growth conditions and some its applications* // Studia Math. (принята к печати).

Ю. С. Федяев

Орловский государственный университет,

fedyaevys@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА "РАЗНОЦВЕТНЫХ" ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В работе исследуется стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды (грунте) постоянной толщины $H = 1$ с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты тензора проницаемости слоя — постоянные величины. Течение жидкости описывают обобщённый потенциал φ и функция тока ψ. Они являются функциями декартовых координат x, y, времени t (t — параметр) и удовлетворяют всюду в области фильтрации $\mathcal{D}$ (за исключением особых точек течения) системе уравнений [1]

$$K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Уравнения (1) записаны в безразмерных величинах. Система уравнений (1) относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0, \quad D_s = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2}\right)^2 > 0, \tag{2}$$

где D_s — определитель симметричной части этого тензора.