4. Bramanti M., Brandolini L., Pedroni M. *Basic properties of nonsmooth Hörmander vector fields and Poincarés inequality* // arXiv:0809.2872 – 2009.

5. Nagel A., Stein E. M., Wainger S. *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties.* // Acta Math. – 1985. – No 155. – P. 103-147.

6. Rotshild L.P., Stein E.M. *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups* // Acta Math. –1946. –V. 137. – P. 247-320.

7. Селиванова С. В. *Касательный конус к квазиметрическому пространству с растяжениями* // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51. – № 2. – С. 388-403.

В. В. Сидоров

Вятский государственный гуманитарный университет, schools@chgk43.ru

О СТРОЕНИИ ИЗОМОРФИЗМОВ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ОДНОПОРОЖДЕННЫХ ПОДАЛГЕБР ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть X — топологическое пространство и $\mathbb{R}^+$ — множество всех неотрицательных действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует полукольцо $C^+(X)$. Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения, тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ для всех $x \in S$. *Подалгеброй* в полукольце $C^+(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа (константы) из $\mathbb{R}^+$. Простейшими примерами подалгебр служат нулевая подалгебра 0, подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ и само полукольцо $C^+(X)$. Обозначим через $A(C^+(X))$ решетку всех подалгебр полукольца $C^+(X)$ относительно включения $\subseteq$, а через $A_1(C^+(X))$ — ее подрешетку, состоящую из всех подалгебр с 1. Наименьшую подалгебру $A \in A_1(C^+(X))$, содержащую функцию $f \in C^+(X)$, назовем *однопорожденной* и обозначим $[f]$. Она состоит из всевозможных многочленов от f с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$.

Понятие однопорожденной подалгебры и техника работы с ними оказались весьма полезными для изучении изоморфизмов решеток $A(C^+(X))$ и $A_1(C^+(X))$ [1]. Заметим, что множество всех подалгебр с 1, включенных в $[f]$, образует подрешетку решетки $A_1(C^+(X))$, которую мы обозначим A_f. Существенно обогатить технику однопорожденных подалгебр удалось при получении ответа на следующие естественные вопросы: каковы должны быть функции $f \in C^+(X)$ и $g \in C^+(X)$, чтобы решетки A_f и A_g были изоморфны, и как устроены изоморфизмы решеток A_f и A_g?

Нами получены следующие результаты.

Предложение. *Для произвольной функции $f \in C^+(X)$ верны следующие утверждения:*

1) $|A_f| = 1 \Longleftrightarrow f \in \mathbb{R}^+$;
2) $|A_f| = 2 \Longleftrightarrow \operatorname{im} f = \{r_1, r_2\},\ r_1 > r_2 > 0$;
3) $|A_f| = 3 \Longleftrightarrow \operatorname{im} f = \{r_1, 0\},\ r_1 > 0$;
4) $|A_f| = \infty \Longleftrightarrow |\operatorname{im} f| \geqslant 3$.

Теорема А. *Для любых функций $f \in C^+(X)$ и $g \in C^+(Y)$ эквивалентны следующие утверждения:*

1) $[f] \cong [g]$ *как* $\mathbb{R}^+$*-алгебры;*

2) $A_f \cong A_g$;

3) *выполняется одно из условий:*

а) $|\operatorname{im} f| = |\operatorname{im} g| = 1$;

б) $|\operatorname{im} f| = |\operatorname{im} g| = 2,\ 0 \notin \operatorname{im} f \cup \operatorname{im} g$ *или* $0 \in \operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g$;

в) $3 \leqslant |\operatorname{im} f| = |\operatorname{im} g| = n < \infty,\ f = kg,\ k \in \mathbb{R}^+$, *как упорядоченные* n*-ки чисел;*

г) $|\operatorname{im} f| = |\operatorname{im} g| = \infty$.

Отметим, что исключительным при доказательстве теоремы A является случай трехзначной функции f, так как к нему может быть сведен случай $|\operatorname{im} f| = n \geqslant 4$.

Пусть $A_f \cong A_g$. Из предложения и теоремы A получаем, что в случае конечнозначной функции f существует единственный изоморфизм α решетки подалгебр A_f на решетку подалгебр A_g. Если функция f — бесконечнозначная, то это уже не так.

Теорема Б. *Для произвольной бесконечнозначной функции $f \in C^+(X)$ и функции $g \in C^+(Y)$ имеем: α — изоморфизм решетки подалгебр A_f на решетку подалгебр A_g тогда и только тогда, когда функция g бесконечнозначна и*

$$\alpha\left(\left[\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right]\right) = \left[\sum_{i=0}^{n} a_i q^{n-i} g^i\right],$$

где q — фиксированное положительное действительное число, соответствующее α.

Для бесконечнозначной функции f подалгебра $[f]$ изоморфна полукольцу многочленов $\mathbb{R}^+[x]$. Поэтому из теоремы Б получаем

Следствие. *Группа автоморфизмов решетки подалгебр с 1 полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{P}$ положительных действительных чисел.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров В. В. *О строении решеточных изоморфизмов полуколец непрерывных функций* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2009. – Т. 39. – С. 339-341.

М. А. Скворцова

Новосибирский государственный университет,

sm-18-nsu@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим квазилинейную систему дифференциальных уравнений нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t) + Dy(t-\tau)\Big) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \quad (1)$$

где A, B, D — постоянные вещественные матрицы размера $n \times n$, $\tau > 0$ — постоянный параметр запаздывания, $F(t, y_1, y_2) \in C(\mathbb{R}^{2n+1})$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по y_1 и оценке

$$\|F(t, y_1, y_2)\| \leqslant q_1\|y_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|y_2\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 > 0, \ \omega_1, \omega_2 > 0.$$

Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), получение областей притяжения