

9. Шишов С. Е. *Понятие компетенции в контексте качества образования // Стандарты и мониторинг в образовании.* – 1999. – № 2. – С. 30-34.

Н. М. Полубоярова (Медведева)

*Волгоградский государственный университет,*  
*nmedu@mail.ru*

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ $n$ -МЕРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Пусть  $M$  —  $n$ -мерное, связное, ориентируемое многообразие класса  $C^3$ . Рассмотрим гиперповерхность  $\mathcal{M} = (M, u)$ , полученную  $C^3$ -погружением  $u : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , и  $C^2$ -гладкую функцию  $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\Phi(-\xi) = \Phi(\xi)$ . Если обозначить через  $\xi$  поле единичных нормалей к поверхности  $\mathcal{M}$ , то для любой  $C^2$ -гладкой поверхности  $\mathcal{M}$  определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \Phi(\xi) d\mathcal{M}, \quad (1)$$

которая не зависит от выбора нормали  $\xi$ .

Основным объектом данного исследования являются поверхности, являющиеся экстремалами функционала (1). Заметим, что при  $\Phi(\xi) \equiv 1$  экстремалами функционала (1) являются минимальные поверхности. Целью настоящей работы является получение признаков устойчивости и неустойчивости экстремальных поверхностей  $\mathcal{M}$ .

Введем понятие вариации функционала (см., например, [3]).

Пусть  $V$  —  $C^2$ -векторное поле, определенное в окрестности поверхности  $\mathcal{M}$  и такое, что выполнены условия:  $V|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ ;  $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$ , где  $h \in C_0^1(\mathcal{M})$ ,  $\xi$  — поле единичных нормалей к

поверхности; интегральными кривыми поля  $V$  являются прямые линии и вдоль каждой интегральной кривой  $|V| = \text{const}$ .

Ясно, что любое векторное поле  $V = h \cdot \xi$ , заданное вдоль  $M$ , можно продолжить в некоторую окрестность  $M$  так, что будут выполнены сформулированные выше условия.

Пусть  $g_t(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов векторного поля  $V$ , т. е.  $g_t(x)$  — решение задачи Коши:  $dg_t(x)/dt = V(g_t(x))$ ,  $g_t(x)|_{t=0} = x$ .

Положим  $M_t = g_t(M)$ . Ясно, что  $M_0 = M$ .

**Определение 1.** Поверхность  $M$  является экстремальной, если первая вариация функционала (1) равна нулю, т. е.

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{M_t} \Phi(\xi) dM_t \right|_{t=0} = 0.$$

**Определение 2.** Экстремальная поверхность  $M$  устойчива (неустойчива), если вторая вариация функционала (1)

$\left. \frac{d^2}{dt^2} \int_{M_t} \Phi(\xi) dM_t \right|_{t=0}$  знакоопределена (не является знакоопределенной) при всех бесконечно малых деформациях поверхности  $M$  с фиксированием границы  $\partial M$ .

В работе [1] был доказан результат, который послужил основой при доказательствах признаков устойчивости и неустойчивости для поверхностей вращения.

Далее будем рассматривать функционал специального вида

$$F(M) = \int_M \phi(\xi_{n+1}) dM, \quad (2)$$

где  $dM$  — элемент площади на  $C^2$ -гладкой поверхности  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , заданной радиус-вектором

$$R(t, \theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \quad (3)$$

$\theta \in S^{n-1}$ ,  $\rho(\theta)$  — радиус-вектор  $S^{n-1}$  сферы,  $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $r(t)$  —  $C^2$ -гладкая функция на  $(a, b)$ ,  $\xi_{n+1}$  — координата единичной нормали к поверхности  $\mathcal{M}$ .

Пусть  $\phi' = \partial\phi/\partial\xi_{n+1}$ ,  $\phi'' = \partial^2\phi/\partial\xi_{n+1}^2$ ,  $\dot{r} = \partial r(t)/\partial t$ ,  $\ddot{r} = \partial^2 r(t)/\partial t^2$ ,  $B = \phi''/((1 + \dot{r}^2)(\phi + \phi'\dot{r}/\sqrt{1 + \dot{r}^2}))$ , тогда справедлива следующая

**Теорема 1.** *Поверхность  $\mathcal{M}$ , заданная радиус-вектором (3), является экстремальной тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r\ddot{r}}{1 + \dot{r}^2} - \frac{n-1}{B+1} = 0.$$

*Экстремальная поверхность  $\mathcal{M}$  устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма*

$$\int_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{h_t'^2}{1 + \dot{r}^2} (B+1) + \frac{|D_\theta h|^2}{r^2} - \frac{h^2}{r^2(1 + \dot{r}^2)} \frac{(n-1)(n+B)}{B+1} \right\} \times \\ \times \left( \phi + \frac{\phi'\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} \right) d\mathcal{M}$$

*знакоопределена в классе липшицевых функций  $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что  $h|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ .*

Пусть

$$h(t, \theta) = h(t), \quad \alpha(t) = (B+1)(\phi + \phi'\dot{r}/\sqrt{1 + \dot{r}^2})r/\sqrt{1 + \dot{r}^2}, \\ \beta(t) = ((B+2)/(B+1))(\phi + \phi'\dot{r}/\sqrt{1 + \dot{r}^2})/(r\sqrt{1 + \dot{r}^2}), \\ \beta_n(t) = ((n-1)(n+B))/(B+1)(\phi + \phi'\dot{r}/\sqrt{1 + \dot{r}^2})/(r\sqrt{1 + \dot{r}^2}).$$

Тогда справедливо

**Следствие 1.1.** *Экстремальная поверхность, заданная радиус-вектором (3), является устойчивой, если  $\alpha(t)\beta_n(t) \leq 0$  для всех  $t \in (a, b)$ .*

Заметим, что в случае  $n = 2$  поверхность  $M \subset \mathbb{R}^3$  задана радиус-вектором  $\vec{r}(t, \theta) = \{t, r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta\}$ .

**Следствие 1.2.** *Поверхность  $M \subset \mathbb{R}^3$ , заданная радиус-вектором (3), является экстремальной тогда и только тогда, когда выполнено одно из уравнений*

$$r\ddot{r}/(1 + \dot{r}^2) - 1/(B + 1) = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \left( \phi' \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} + \phi \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} \right) = 0.$$

Экстремальная поверхность  $M \subset \mathbb{R}^3$ , заданная радиус-вектором (3), является устойчивой тогда и только тогда, когда знакоопределена квадратичная форма

$$\int_a^b \{ \alpha(t) h_t'^2(t) - \beta(t) h^2(t) \} dt$$

в классе липшицевых функций  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , таких, что  $h(a) = h(b) = 0$ .

**Замечание.** Следствия 1.1 (в случае  $n = 2$ ) и 1.2 были опубликованы как самостоятельные результаты в [4].

**Утверждение.** *Поверхности, заданные радиус-вектором (3), при  $\phi(\xi_{n+1}) \equiv 1$  являются экстремальными тогда и только тогда, когда выполнено равенство  $\ddot{r}/(1 + \dot{r}^2) - (n - 1)/r = 0$ , и они совпадают с классом минимальных поверхностей.*

На основании теоремы 1 и определения 2 был получен признак устойчивости (неустойчивости) для классов поверхностей, для которых выполнено условие  $\alpha(t)\beta_n(t) \leq \nu^2$ . Заметим, что

этот признак применим в случаях, отличающихся от рассматриваемых в следствии 1.1. Пусть  $\sup_{t \in (a,b)} \alpha(t)\beta_n(t) = \nu^2$ . Сформулируем основной результат.

**Теорема 2.** Пусть экстремальная поверхность  $M$  задана радиус-вектором (3). Для положительных функций  $\alpha(t)$ ,  $\beta_n(t)$  поверхность  $M$  является устойчивой, если  $\int_a^b dt/\alpha(t) \leq \pi/\nu$ , и неустойчивой, если  $\int_a^b \beta_n(t)dt > \pi\nu$ .

**Пример.** При  $\phi(\xi_{n+1}) = \sqrt{2\xi_{n+1}^2 - 1}$  для функционала (2) класс экстремальных поверхностей соответствует классу максимальных поверхностей в пространстве-времени Минковского  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , которые устойчивы и глобально максимизируют площадь в  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  (см., например, [2]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клячин В. А., Медведева Н. М. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади // Сибирские электронные математические известия. – 2007. – Т. 4. – С. 113-132.
2. Клячин В. А., Миклюков В. М. Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1991. – Т. 55. – № 1. – С. 206-217.
3. Клячин В. А., Миклюков В. М. Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях // Матем. сб. – 1996. – Т. 187. – № 11. – С. 67-88.
4. Медведева Н. М. Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения // Изв. Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2007. – Т. 7. – Вып. 2. – С. 25-32.