С. К. Паймеров

Марийский государственный университет,

paymerov@mail.ru

О КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА НА ГРАНИЦЕ

Исследуется нелинейная обратная задача определения скорости звука в неоднородности, локализованной в пределах трехмерной ограниченной области, по данным о рассеянном этой неоднородностью скалярном акустическом поле. Акустические колебания в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описываются волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2(x)}u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) - f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

и краевым условием третьего рода на границе $\Sigma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \sigma(x)u(x,t) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ — акустическое давление в точке $x \in \Omega$ в момент времени t, величина $c(x) > 0$ определяет скорость звука в этой точке; $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали n к границе Σ, вычисленная со стороны области Ω. Исследуемая обратная задача заключается в определении коэффициента $c(x)$ по результатам наблюдения рассеянного на неоднородности поля $u(x,t)$. Предполагается, что среда, заполняющая область Ω, однородна вне некоторой априорно заданной подобласти R,

$\overline{R} \subset \Omega$, так что $c(x) = c_0$ при $x \in \overline{\Omega} \setminus R$, где константа c_0 известна, а функция $c = c(x)$ при $x \in R$ подлежит определению; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$. Наблюдение рассеянного поля проводится в точках множества $Y \subset \Omega$, не пересекающегося с $\overline{R}$. Зондируемая неоднородность облучается волновыми полями, источники которых описываются функциями $f(x,t) = f(x,t;q)$, $q \in Q$. Здесь q — параметр, определяющий вид и положение источника колебаний, множество Q описывает семейство источников рассеиваемых волн. Предполагается, что источники $f(x,t;q)$ локализованы в пределах области излучения, не пересекающейся с зондируемой областью R.

Коэффициентная обратная задача для уравнения (1) во всем пространстве, т. е. при $\Omega = \mathbb{R}^3$, а также коэффициентная обратная задача для уравнения (1) с условием Дирихле на границе (условие (3) заменяется на $u(x,t) = 0$, $x \in \Sigma$, $t \geqslant 0$) исследовались ранее в [1, 2], где была предложена методика их сведения к линейным интегральным уравнениям первого рода. В настоящей работе развитая в [1, 2] техника модифицируется применительно к начально-краевой задаче (1) – (3) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Будем предполагать, что функция c, характеризующая скорость звука в среде, принадлежит классу $C^3(\overline{\Omega})$. Считаем, что граница $\Sigma \in C^5$; $\sigma \in C^1(\Sigma)$, $\sigma(x)$ не равна тождественно нулю. Очевидно, что отыскание $c(x)$, $x \in R$, эквивалентно нахождению функции $\xi(x) = c^{-2}(x) - c_0^{-2}$, $x \in R$. Предположим также, что источники рассеиваемых волн описываются функциями $f(x,t;q) = \varphi(x;q)g(t)$, причем $\varphi(\cdot;q) \in C^3(\overline{\Omega})$ $\forall q \in Q$.

Обозначим через $S(q)$ носитель функции $\varphi(\cdot;q)$, совпадающий с замыканием множества $\{x \in \Omega : \varphi(x;q) \neq 0\}$, $q \in Q$. Предполагаются выполненными следующие условия.

Условие 1. *Имеют место соотношения*

$$\Big(\bigcup_{q\in Q} S(q)\Big)\bigcap \overline{R} = \emptyset, \quad Y\cap \overline{R} = \emptyset.$$

Условие 2. $g \in C^5[0,\infty)$ *и выполняются соотношения*

$$\int_0^\infty g(t)\,dt \neq 0; \quad |g(t)| \leqslant Me^{-\beta t} \quad \forall t\geqslant 0 \quad (M>0,\ \beta>0);$$

$$\sup_{t\geqslant 0}|g^{(k)}(t)| < \infty, \quad 1\leqslant k\leqslant 5; \quad g^{(k)}(0) = 0, \quad 0\leqslant k\leqslant 4.$$

Условие 1 означает, что зондируемая область R находится на положительном расстоянии от носителей $S(q)$ источников облучающих волн и множества Y, где наблюдается поле, рассеянное неоднородностью.

Сформулируем постановку рассматриваемой обратной задачи. Обозначим через $u(x,t;q) = u(x,t)$ решение задачи (1) – (3), понимаемое в классическом смысле. Предполагается, что для наблюдения доступны значения $u(x,t;q)$ при $t\geqslant 0$, $x\in Y$, $q\in Q$. Множество Y представляет собой гладкую замкнутую поверхность, лежащую внутри области Ω; $Y\cap\overline{R} = \emptyset$. По этим данным требуется определить $c(x)$, $x\in R$, или, что то же, функцию $\xi(x)$, $x\in R$.

Обозначим через $G(x,x';p)$ функцию Грина краевой задачи третьего рода

$$\begin{cases} \Delta h(x) - p^2 c_0^{-2} h(x) = f(x), & x\in\Omega, \\ \frac{\partial h(x)}{\partial n} + \sigma(x)h(x) = 0, & x\in\Sigma. \end{cases}$$

По определению,

$$h(x) = \int_\Omega G(x,x';p)f(x')\,dx', \ x\in\Omega.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда функция $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$\int\limits_R \xi(x')G(x,x';0) \int\limits_{S(q)} G(x',x'';0)\varphi(x'';q)\,dx''\,dx' =$$
$$= \left(\int\limits_0^\infty g(t)\,dt\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\widetilde{u}_{pp}(x,0;q) - \right.$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty g(t)\,dt \int\limits_{S(q)} G_{pp}(x,x';0)\varphi(x';q)\,dx' +$$
$$+ \int\limits_0^\infty tg(t)\,dt \int\limits_{S(q)} G_p(x,x';0)\varphi(x';q)\,dx' -$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^2 g(t)\,dt \int\limits_{S(q)} G(x,x';0)\varphi(x';q)\,dx' \right) \forall x \in Y\ \forall q \in Q. \quad (4)$$

Здесь $\widetilde{u}(x,p;q)$ — преобразование Лапласа функции $u(x,t;q)$ по переменной t.

Соотношение (4) представляет собой линейное интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции $\xi(x)$.

Условие 3. *Положим $Q = \{q_{mn}\}$, $q_{mn} = (z_m, d_n)$, $z_m \in \Omega$, $d_n > 0$, $d_n \to 0$, где множество $\widetilde{X} = \{z_m\}$ всюду плотно на поверхности $X \in C^2$, лежащей внутри Ω и не пересекающейся с $\overline{R}$, $\Sigma_R \equiv \partial R \in C^2$; $S_{q_{mn}} = O_{d_n}(z_m)$, $\int\limits_{O_{d_n}(z_m)} \varphi(x;q_{mn})\,dx = 1$; $m,n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1 – 3. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $\xi(x)$.*

Доказательство теоремы 2 использует следующие предложения.

Предложение 1. *Семейство* $\{G(x,z;0)\}_{z\in X}$ *является полным в смысле* $L_2(R)$ *во множестве* $N_R(\Delta) = \{u \in C^2(\overline{R}) : \Delta u(x) = 0,\ x \in R\}$.

Предложение 2. *Семейство* $\{G(x,y;0)\}_{x\in Y}$ *полно в* $L_2(R)$ *во множестве* $N_R(\Delta)$.

Предложение 3. [3, с. 45.] *Семейство* $\{u_1 u_2 : u_1, u_2 \in N_R(\Delta)\}$ *полно в* $L_2(R)$.

Предложение 4. *Семейство* $\{G(x,x';0)G(x',z;0)\}_{x\in Y, z\in X}$ *полно в* $L_2(R)$.

Отметим, что предложение 4 следует из предложения 3 с учетом предложений 1 и 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00273а) и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (темплан МарГУ, № 1.2.09).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Козлов А. И. *Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43. – № 8. – С. 1201-1209.

2. Кокурин М. Ю., Паймеров С. К. *Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48. – № 1. – С. 115-126.

3. Рамм А. Г. *Многомерные обратные задачи рассеяния.* – М.: Мир, 1994. – 496 с.