где A_0 *— произвольный оператор, удовлетворяющий условию* $A_0(X) \subset N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых (проект МК-346.2009.1) и РФФИ (проект 10-01-00097-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейс С. *Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах* // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – Вып. 11. – 36 с.

О. С. Кудрявцева

Волжский гуманитарный институт,

Kudryavceva@vgi.volsu.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССА ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ДРОБНЫМ ИТЕРИРОВАНИЕМ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕДИНИЧНОГО КРУГА В СЕБЯ, СОХРАНЯЮЩИХ НАЧАЛО КООРДИНАТ

Пусть f — аналитическая функция, отображающая единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя и удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. В силу согласованности области определения и области значения функции f определены её натуральные итерации по правилу $f^0(z) \equiv z$, $f^1(z) = f(z)$ и $f^n(z) = f \circ f^{n-1}(z)$ при $n = 2, 3, \ldots$.

Хорошо известно (см., например, [1]), что существует предел нормированной последовательности натуральных итераций f^n, $n = 1, 2, \ldots$

$$K(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z)}{(f'(0))^n},$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию и называется функцией Кёнигса.

Эта функция является единственным решением функционального уравнения Шрёдера

$$K(f(z)) = f'(0)K(z)$$

в классе аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций с нормировкой $K(0) = 0$, $K'(0) = 1$, и может служить для получения натуральных итераций функции f как решений функционального уравнения

$$K\left(f^n(z)\right) = \left(f'(0)\right)^n K(z).$$

С функцией Кёнигса тесно связана так называемая проблема дробных итераций, которая состоит в том, чтобы в случае существования определить семейство $\{f^t\}$, $t \geqslant 0$, аналитических в $\mathbb{D}$ функций, непрерывно зависящее от t и удовлетворяющее условиям $f^0(z) \equiv z$, $f^1(z) = f(z)$ и $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при s, $t \geqslant 0$.

В работе [3] дан критерий существования дробных итераций аналитической функции f, отображающей $\mathbb{D}$ в себя и удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, в терминах решения функционального уравнения Шрёдера.

В данной работе методами, разработанными в [2], получено интегральное описание класса функций Кёнигса, которые соответствуют изучаемым функциям, допускающим дробное итерирование.

Теорема. *Пусть f — аналитическая функция, отображающая единичный круг $\mathbb{D}$ в себя, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, и имеющая дробные итерации. Тогда её функция Кёнигса K представима в виде*

$$K(z) = z \exp \left\{ \left(1 + \sigma^2\right) \int_{\mathbb{T}} \ln \frac{1}{1 - \varkappa z} \, d\mu(\varkappa) \right\} \tag{1}$$

с некоторым $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и вероятностной мерой μ на $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. При этом под логарифмом понимается непрерывная ветвь, принимающая значение 0 при $z = 0$.

Обратно, при любом $\sigma = e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, и любой вероятностной мере μ на $\mathbb{T}$ формула (1) определяет функцию Кёнигса некоторой аналитической функции f, отображающей единичный круг $\mathbb{D}$ в себя, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ и имеющей дробные итерации.

Показано также, что функция K, имеющая представление (1), является однолистной, отображает $\mathbb{D}$ на θ-спиральную область и дробные итерации функции f определяются посредством K формулой

$$f^t(z) = K^{-1}\left(e^{-\sigma t} K(z)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Валирон Ж. *Аналитические функции.* – М.: ГИТТЛ, 1957. – 235 с.

2. Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С. *Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса* (в печати).

3. Elin M., Goryainov V., Reich S., Shoikhet D. *Fractional iteration and functional equations for functions analytic in the unit disk* // Computational Methods and Function Theory. – 2002. – V. 2. – No 2. – C. 353-366.

В. И. Кузоватов

Сибирский федеральный университет,

kuzovatov@yandex.ru

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В работе получен аналог теоремы Лиувилля для решений уравнения Гельмгольца. А именно, показано, что если решение $f(x_1, \ldots, x_k)$ данного уравнения $\Delta f + \lambda f = 0$, $\lambda < 0$, имеет степенной рост в полупространстве и равно нулю на границе этого полупространства, то оно тождественно равно нулю. Для гармонических функций такое утверждение неверно. Примером служит функция x_k. Отличие решений уравнения Лапласа от решений уравнения Гельмгольца заключается в том, что оператор Гельмгольца является эллиптическим по Крылову в отличие от оператора Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-7347.2010.1).