2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* – М.: БИНОМ, 2007. – 636 с.

Н. В. Кондратьева

Чувашский государственный педагогический университет,

kondrateva-nv@inbox.ru

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА АБСОЛЮТЕ ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе изучается геометрия сопряженной сети Σ_{n-1}, заданной на невырожденном абсолюте Q^2_{n-1} проективно-метрического пространства K_n.

Известно [2], что n-мерным пространством K_n с проективной метрикой называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q^2_{n-1} (абсолют); уравнение Q^2_{n-1} в проективном репере R записывается в виде

$$g_{IK}x^I x^K = 0,\ g_{[IK]} = 0. \tag{1}$$

Отнесем абсолют Q^2_{n-1} к реперу первого порядка, то есть его вершина $A_0 \in Q^2_{n-1}$, а точки A_i лежат в касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A_0)$ к абсолюту в точке A_0.

За счет нормировки коэффициентов абсолюта Q^2_{n-1} (1) его уравнение в репере первого порядка можно записать в виде

$$g_{ij}x^i x^j + g_{nn}(x_n)^2 + 2g_{in}x^i x^n = 2x^0 x^n. \tag{2}$$

Доказана

Теорема 1. *Проективно-метрическое пространство* K_n *с невырожденным абсолютом* Q^2_{n-1} *(см. (2)) в первой дифференциальной окрестности индуцирует двойственное относительно инволютивного преобразования структурных форм проективно-метрическое пространство* $\bar{K}_n$ *с невырожденным абсолютом* $\bar{Q}^2_{n-1}$*; абсолют* $\bar{Q}^2_{n-1}$ *пространства* $\bar{K}_n$ *есть семейство касательных гиперплоскостей второго порядка к абсолюту пространства* K_n.

Пусть на абсолюте Q^2_{n-1} задана сеть Σ_{n-1}. В репере $R = \{A_I\}$, отнесенном к сети, ее дифференциальные уравнения имеют вид [1]

$$\omega^i_j = a^j_{ik}\omega^k_0, \; i \neq j. \tag{3}$$

Продолжая уравнения (3), имеем

$$da^j_{ik} + a^j_{ik}(\omega^0_0 - \omega^i_i + \omega^j_j) - a^j_{is}\omega^s_k + g_{ik}\omega^j_n - \delta^j_k\omega^0_i -$$
$$- \sum_{t\neq i,j} a^j_{tk}\omega^t_i = \widetilde{a}^j_{iks}\omega^s_0, \widetilde{a}^j_{i[ks]} = 0, \; i \neq j. \tag{4}$$

Рассмотрим сеть $\Sigma_{n-1} \subset Q^2_{n-1}$, сопряженную относительно поля конусов направлений $g_{ik}\omega^i_0\omega^k_0 = 0$; в выбранном репере справедливо

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{5}$$

Из уравнений (4) с использованием (5) получим

$$q^j_n = \frac{1}{n-2}\sum_{j\neq i} g^{ii}a^j_{ii}, dq^j_n + q^j_n(\omega^j_j - \omega^n_n) + \omega^j_n = q^j_{nk}\omega^k_0;$$

$$q^0_i = -\frac{1}{n-2}\sum_{j\neq i} a^j_{ij}, dq^0_i + q^0_i(\omega^0_0 - \omega^i_i) + \omega^0_i = q^0_{ik}\omega^k_0;$$

где $(n-1)$ квазинормалей q_n^j определяют нормаль первого рода — гармоническую прямую сопряженной сети $\Sigma_{n-1} \subset Q_{n-1}^2$, а $(n-1)$ квазинормалей q_i^0 определяют нормаль второго рода — гармоническую гиперпрямую сопряженной сети $\Sigma_{n-1} \subset \subset Q_{n-1}^2$. Справедлива

Теорема 2. *Поля гармонических прямых q_n^j и гиперпрямых q_i^0 сопряженной сети Σ_{n-1}, заданной на абсолюте Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n, нормализуют гиперквадрику Q_{n-1}^2 взаимно.*

Пусть абсолют Q_{n-1}^2 пространства K_n нормализован полями квазитензоров ν_n^k, ν_i^0. Возьмем функции

$$\bar{\nu}_n^i = -g^{ii}\nu_i^0, \quad \bar{\nu}_i^0 = g_{ii}\nu_n^i; \tag{6}$$

можно показать, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\bar{\nu}_n^i - \bar{\nu}_n^i(\bar{\omega}_n^n - \bar{\omega}_i^i) + \bar{\omega}_n^i = \bar{\nu}_{nk}^i \bar{\omega}_0^k, \tag{7}$$

$$d\bar{\nu}_i^0 + \bar{\nu}_i^0(\bar{\omega}_0^0 - \bar{\omega}_i^i) + \bar{\omega}_n^i = \bar{\nu}_{ik}^0 \bar{\omega}_0^k, \tag{8}$$

где

$$\bar{\nu}_{nk}^i = -g^{ii}\nu_{ik}^0, \quad \bar{\nu}_{ik}^0 = g_{ii}\nu_{nk}^i.$$

Уравнения (7), (8) говорят о том, что нормализация одного из абсолютов Q_{n-1}^2 и $\bar{Q}_{n-1}^2$ двойственных пространств равносильна нормализации другого; при этом компоненты полей оснащающих объектов $\{\nu_n^k, \nu_i^0\}$, $\{\bar{\nu}_n^k, \bar{\nu}_i^0\}$ связаны соотношениями (6).

Зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода ν_n^i (ν_i^0) абсолюта $Q_{n-1}^2 \subset K_n$, с использованием его двойственной теории (см. теорему 1) легко построить внутренним образом определенную соответствующую нормаль второго (первого) рода $\nu_i^0(\nu_n^i)$ следующим образом: построим охват квазитензора $\bar{\nu}_n^i(\bar{\nu}_i^0)$ на двойственном абсолюте $\bar{Q}_{n-1}^2$, аналогичный охвату ν_n^i (ν_i^0), после чего по закону (6) найдем соответствующую нормаль $\nu_i^0(\nu_n^i)$. В этом случае, согласно [3], говорят, что поля нормалей ν_n^i и ν_i^0 двойственны по отношению друг к другу.

Доказаны следующие предложения.

Теорема 3. *Для сопряженной сети Σ_{n-1}, заданной на невырожденном абсолюте Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n, поля ее гармонических прямых q_n^j и гармонических гиперпрямых q_i^0 двойственны по отношению друг к другу.*

Теорема 4. *Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, индуцируемые нормализацией абсолюта Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n полями гармонических прямых и гиперпрямых сопряженной сети $\Sigma_{n-1} \subset Q_{n-1}^2$, совпадают (то есть вырождаются в одну связность).*

Теорема 5. *Аффинная связность без кручения ∇, индуцируемая нормализацией абсолюта $Q_{n-1}^2 \subset K_n$, полями гармонических прямых и гиперпрямых сопряженной сети $\Sigma_{n-1} \subset$ $\subset Q_{n-1}^2$, является вейлевой с полем метрического тензора g_{ij} и с дополнительной формой* [2]

$$\theta = \omega_0^0 - \omega_n^n - q_n^s\omega_s^n - q_s^0\omega_0^s.$$

Теорема 6. *Нормализация невырожденного абсолюта* Q^2_{n-1} *проективно-метрического пространства* K_n *полями гармонических прямых и гиперпрямых сопряженной сети* $\Sigma_{n-1} \subset Q^2_{n-1}$ *может быть гармонической* ($q^0_{[st]} = 0$) *и сопряженной* ($q^l_{n[s}g_{t]l} = 0$) *лишь одновременно; в случае ее гармоничности (или сопряженности) аффинная связность* ∇, *индуцируемая этой нормализацией, является римановой с полем метрического тензора* g_{ik}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базылев В. В. *О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства* // Изв. вузов. Матем. – 1966. – № 2. – С. 9-19.

2. Норден А. П. *Пространства аффинной связности.* – М. : Наука, 1976. – 432 с.

3. Столяров А. В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ин-т, 1994. – 290 с.

Н. Н. Корнеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Natalia.Korneeva@ksu.ru

АВТОМАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МОНАДИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ f-ПОЛНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе [1] для изучения структуры степеней конечно-автоматных преобразований было введено понятие полной последовательности. В дальнейшем степени автоматных преобразований полных последовательностей изучались в работах