В. В. Ключев

Марийский государственный университет,

vfri@mail.ru

ОБ УСЛОВИЯХ КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача Коши

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax(t), \quad t \in [0,T],$$
$$x(0) = f, \quad \dot{x}(0) = 0, \tag{1}$$

где $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X; $\overline{D(A)} = X$, $f \in D(A)$. Предполагается, что для спектра $\sigma(A)$ и резольвенты $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$ оператора A выполняется следующее условие секториальности:

Условие А. *Для некоторого* $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ *имеют место включение*

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg\zeta| < \varphi\},$$

и оценка

$$\|R(\zeta, A)\| \leqslant \frac{C_0}{1 + |\zeta|} \quad \forall\zeta \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0)$$

с постоянной C_0*, не зависящей от* ζ.

При выполнении условия A задача (1) поставлена, вообще говоря, некорректно.

Рассматривается следующий класс разностных схем, аппроксимирующих задачу Коши (1):

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = (\Delta t)^2(\beta_2 A x_{n+2} + \beta_1 A x_{n+1} + \beta_0 A x_n),$$

$$n = \overline{0, N-2}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}; \quad x_0 = x_1 = f. \tag{2}$$

Здесь β_0, β_1, β_2 — вещественные числа, выбор которых определяет конкретную разностную схему.

В работе [1] установлены ограничения на β_0, β_1, β_2, при выполнении которых для приближений x_n, порождаемых схемой (2), существование решения на отрезке $[0; T_1]$, $T_1 > T$, влечет равномерную оценку

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_1(\Delta t)^q, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon), \tag{3}$$

для всех $q \in (0; 1 - T_1^{-1}T)$ с постоянной C_1, определяемой лишь выбранным методом.

Соотношение (3) получено путем оценки погрешности разностных аппроксимаций решения скалярной задачи Коши, соответствующей (1), с использованием техники операторного исчисления Рисса – Данфорда для секториальных операторов в банаховом пространстве. Указанная скалярная задача Коши имеет вид

$$\ddot{y}(t) = \lambda y(t), \quad t \in [0, T],$$

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \tag{4}$$

а разностные аппроксимации решения $y = y(t)$ задачи (4) строятся по схеме

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \lambda(\Delta t)^2(\beta_2 y_{n+2} + \beta_1 y_{n+1} + \beta_0 y_n),$$

$$n = \overline{0, N-2}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}; \quad y_0 = y_1 = 1. \tag{5}$$

Техника интерполяции банаховых пространств позволяет получить условия, необходимые для выполнения оценки (3). Обозначим $z = \lambda(\Delta t)^2$, $y_n(\lambda) = v_n(z)$ и потребуем выполнения следующего вспомогательного условия для схемы (5).

Условие B. *Имеет место оценка*

$$\int\limits_{\Gamma} |v_n(z)| \exp(-n\mathrm{Re}\sqrt{z})|z|^{m-1}|dz| \leqslant C_2, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

с постоянной C_2, не зависящей от n. Здесь контур Γ состоит из лучей $|\arg z| = \varphi_0$.

Отметим, что условие B — это условие лишь на коэффициенты схемы (2).

Теорема. *Пусть разностные приближения к решению задачи Коши (1) строятся по схеме (2), имеет место условие A, а коэффициенты разностной схемы таковы, что для приближений (5) к решению скалярной задачи (4) имеет место условие B. Пусть выполняется оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_3(\Delta t)^q, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad q \in (0,1), \quad \Delta t \in (0, \varepsilon)$$

Тогда имеет место истокообразное представление $x(T) \in D(A^{q_1})$ с произвольным $q_1 \in (0, q/2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00273а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Ключев В. В. *Об оценке скорости сходимости разностных методов решения некорректной задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве* // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т.11. – С. 25-31.