**О. М. Кечина**

*Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, otka-83@mail.ru*

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений представляют большой интерес, так как являются математическими моделями различных физических, химических и других явлений. В данной работе рассмотрена смешанная задача для уравнения колебаний струны с интегральным условием и предложен вариант исследования её разрешимости. Смешанные задачи с интегральными условиями изучаются в работах Л. С. Пулькиной [1], С. А. Бейлина [2] и других авторов.

Рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

граничному условию

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и интегральному условию

$$\int_0^l K(x,t)u(x,t)\,dx = s(t), \tag{4}$$

где функция $K(x,t)$ задана в $\bar{\Omega}$, а $s(t)$ — на $[0,T]$.

Под классическим решением задачи (1) – (4) будем понимать функцию $u(x,t) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) – (4).

**Теорема.** *Если* $\varphi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi(x) \in C^1[0,l]$, $s(t) \in C[0,t]$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $\varphi'(l) = \psi'(l) = 0$, $\int\limits_0^l K(x,t)\,dx \neq 0$, *то существует единственное решение задачи* (1) – (4).

**Доказательство.** Так как $u(x,t) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, то $u_x(x,t)$ принимает некоторое значение при $x = l$. Обозначим

$$u_x(l,t) = \nu(t). \tag{5}$$

Временно считая $\nu(t)$ известной функцией, рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3) и (5), где $\nu(t) \in C^2(0,T)$ удовлетворяет условиям согласования

$$\nu(0) = u_x(l,0) = \varphi'(l) = 0, \quad \nu'(0) = u_{xt}(l,0) = \psi'(l) = 0.$$

Для того чтобы граничные условия задачи стали однородными, введём новую неизвестную функцию

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) + W(x,t), \tag{6}$$

где $W(x,t) = -\frac{x^2}{2l}\nu(t)$.

Относительно $\tilde{u}(x,t)$ вспомогательная задача имеет вид

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = F(x,t), \tag{7}$$

$$\tilde{u}(x,0) = \varphi(x), \quad \tilde{u}_t(x,0) = \psi(x), \tag{8}$$

$$\tilde{u}_x(0,t) = 0, \quad \tilde{u}_x(l,t) = 0, \tag{9}$$

где $F(x,t) = \frac{\nu(t)}{l} - \frac{x^2}{2l}\nu''(t)$. Решение задачи (7) – (9) имеет вид

$$\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{\pi k}{l}x\cdot\left(-\frac{2l}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi k}{l}t\int\limits_0^l\varphi''(x)\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx-\right.$$

$$-\frac{2l}{\pi^2k^2}\sin\frac{\pi k}{l}t\int\limits_0^l\psi'(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx+$$

$$\left.+\frac{(-1)^{k+1}2l^2}{\pi^3k^3}\int\limits_0^t\nu''(\tau)\sin\frac{\pi k}{l}(t-\tau)d\tau\right).\quad(10)$$

Вернёмся к решению исходной задачи. Из (6) следует, что $u(x,t)=\tilde{u}(x,t)-W(x,t)$. Умножив это равенство на $K(x,t)$ и проинтегрировав по отрезку $[0,l]$, с учётом (4) и (10) получим

$$\nu(t)\frac{1}{2l}\int_0^l K(x,t)x^2\,dx+$$

$$+\frac{2l^2}{\pi^3}\int_0^l K(x,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cos\frac{\pi k}{l}x}{k^3}\int\limits_0^t\nu''(\tau)\sin\frac{\pi k}{l}(t-\tau)d\tau dx=$$

$$=G_1(t),\quad(11)$$

где

$$G_1(t)=s(t)+$$

$$+\frac{2l}{\pi^2}\int_0^l K(x,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{\pi k}{l}x\left(\cos\frac{\pi k}{l}t\int\limits_0^l\varphi''(x)\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi k}{l}t\int\limits_0^l\psi'(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx\right)dx.$$

С учётом равенства

$$\int\limits_0^t \nu''(\tau)\sin\frac{\pi k}{l}(t-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{\pi k}{l}\nu(t) - \frac{\pi^2 k^2}{l^2}\int\limits_0^t \nu(\tau)\sin\frac{\pi k}{l}(t-\tau)d\tau$$

преобразуем равенство (11) и найдём суммы рядов, входящих в получившееся равенство, с помощью формул [3]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}; \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k} = \frac{x}{2}.$$

С учётом условий теоремы 1 получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\nu(t)$:

$$\nu(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^t \nu(t)H(t,\tau)\,d\tau = G(t), \qquad (12)$$

где

$$G(t) = \frac{G_1(t)}{A(t)},$$

$$A(t) = \frac{1}{2l}\int_0^l x^2K(x,t)\,dx +$$
$$+ \frac{2l}{\pi^2}\int_0^l K(x,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos\frac{\pi k}{l}x\,dx = \frac{1}{6}\int_0^l K(x,t)\,dx,$$

$$H(t,\tau) = \frac{1}{A(t)}\int_0^l K(x,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos\frac{\pi k}{l}x\sin\frac{\pi k}{l}(t-\tau)\,dx =$$
$$= \frac{3\pi(t-\tau)}{l}.$$

Из условий теоремы следует, что ядро $H(t,\tau)$ и правая часть $G(t)$ уравнения (12) — непрерывные функции. Следовательно, существует единственная непрерывная функция $\nu(t)$, являющаяся его решением [4]. Из однозначной разрешимости (12) следует существование единственного классического решения исходной задачи $u(x,t)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пулькина Л. С. *Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74. – № 3. – С. 430-435.

2. Бейлин С. А. *Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения* // Неклассические уравнения математической физики. Сборник научных работ. – Новосибирск, 2005. – Т. 35. – С. 37-43.

3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

4. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.