ЛИТЕРАТУРА

1. Бережной Д. В., Коноплев Ю. Г., Секаева Л. Р. *Исследование взаимодействия строительных сооружений с сухими и водонасыщенными грунтами* // Ученые записки Казан. гос. ун-та. Серия физ.-матем. науки. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007. – Т. 148. – Кн. 3. – С. 4-12.

2. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности.* – М.: Мир, 1987. – 542 с.

3. Фадеев А. Б. *Метод конечных элементов в геомеханике.* – М.: Недра, 1987. – 221 с.

4. Голованов А. И., Бережной Д. В. *Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел.* – Казань: Изд-во "ДАС", 2001. – 301 с.

Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова

Институт прикладных исследований,

Стерлитамакская государственная педагогическая академия

им. З. Биишевой, ruslan7k7@mail.ru, kosul@mail.ru

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$. Для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Предположим, что функции $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, измеримые по $\mathbf{x} \in \Omega$ и для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$ при п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$ подчиняются условиям

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta))\,(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant \overline{a}|\xi - \eta|^{m+1}, \quad m \geqslant 1;$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, \xi) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, \eta)| \leqslant \widehat{a}|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{m-1}, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n);$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}.$$

Работа посвящена исследованию скорости убывания решения задачи (1), (2) на бесконечности в зависимости от геометрических свойств неограниченной области Ω.

Здесь ограничимся рассмотрением областей вращения

$$\Omega(f) = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \,|\, x_1 > 0, \, |\mathbf{x}'| < f(x_1)\}$$

с положительной функцией $f(x_1)$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ назовем П-последовательностью функции f, если справедливы равенства

$$z_0 = 1, \quad z_j = \sup\left\{ r \,\Big|\, \inf_{[z_{j-1}, r)} f(x) \geqslant r - z_{j-1} \right\}, \quad j = \overline{1, \infty}.$$

Если существует постоянная $\omega \geqslant 1$, такая, что

$$\sup\{f(z) \,|\, z \in [x - f(x), x + f(x)]\} \leqslant \omega f(x), \quad x \geqslant 1, \tag{3}$$

то найдется постоянная $\overline{\omega} \geqslant 1$, такая, что справедлива оценка

$$\overline{\omega}^{-1} \leqslant \frac{z_{j+1} - z_j}{z_j - z_{j-1}} \leqslant \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} \geqslant 1, \quad j = \overline{1, \infty}. \tag{4}$$

Чтобы ограничить влияние вектор-функции $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = (\Phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \Phi_n(\mathbf{x}))$ на поведение решения, будем считать, что она имеет компактный носитель:

$$\operatorname{supp} \mathbf{\Phi} \subset \Omega_0^{z_0}.$$

Здесь и ниже использовано обозначение $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, a < x_1 < b\}$. В следующей теореме, которая доказана в работе [1], установлены оценки сверху решения задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть* $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ — Π*-последовательность функции* f. *Тогда найдутся положительные постоянные* $\kappa(\widehat{a}, \overline{a}, m)$, $M(\widehat{a}, \overline{a}, m, \mathbf{\Phi})$, *такие, что для решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *при* $N \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_{m+1}(\Omega_{z_N}^{z_{N+1}}(f))} \leqslant M\Delta_{N+1} \exp(-\kappa N). \tag{5}$$

Следствием оценки (5) в области вращения $\Omega(f)$ с функцией f, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r} = 0; \quad f(x) \geqslant 1, \quad x \geqslant 1,$$

является оценка

$$\|u\|_{L_{m+1}(\Omega_r^{r+1}(f))} \leqslant \widetilde{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa} \int_1^r \frac{dx}{f(x)}\right). \tag{6}$$

В настоящей работе для неотрицательных решений задачи (1), (2) получены оценки снизу, подтверждающие точность оценок (5), (6).

Теорема 2. *Пусть* Π*-последовательность* $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ *функции* $f(x)$ *удовлетворяет условию* (4). *Тогда для неотрицательного решения* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *существуют положительные числа* $K(\overline{\omega}, n, m, \widehat{a}, \overline{a})$, $\mu(n, m, \widehat{a}, \overline{a}, f, \Phi)$, *такие, что для* $N \geqslant 2$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{L_{m+1}(\Omega_{z_N}^{z_{N+1}}(f))} \geqslant \mu\Delta_{N+1}\exp(-KN). \tag{7}$$

Вывод оценки (7) опирается на неравенство Гарнака для квазилинейных эллиптических уравнений, установленное J. Serrin [2], N. S. Trudinger [3]. Сформулируем его в следующем виде: для неотрицательного решения $u(\mathbf{x})$ уравнения (1) с $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ в шаре $B(2R, \mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_n$, справедливо неравенство

$$\sup_{B(R,\mathbf{w})} u(\mathbf{x}) \leqslant H \inf_{B(R,\mathbf{w})} u(\mathbf{x}), \tag{8}$$

в котором постоянная $H \geqslant 1$ зависит лишь от n, $\overline{a}$, $\widehat{a}$.

Введем обозначения:

$$Q_{a,b,\delta} = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \,|\, a < x < b,\ |\mathbf{x}'| < \delta\},$$

$$\widehat{Q}_{a,b,\rho} = Q_{a,b,\Delta} \cup B(2\rho\Delta, (a, \mathbf{0}')) \cup B(2\rho\Delta, (b, \mathbf{0}')),$$

$\rho \leqslant 1/2$, $\Delta = b - a$. Следствием неравенства (8) являетс[illegible] следующая

Лемма. *Пусть* $\rho \leqslant 1/2$, *тогда существует число* $\widehat{H} >$ [illegible], *такое, что неотрицательное решение* $u(\mathbf{x})$ *уравнения* (1) *с* $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ *в* $\widehat{Q}_{a,b,\rho}$ *удовлетворяет неравенству*

$$u(a, \mathbf{0}') \leqslant \widehat{H} \inf_{\overline{Q}_{a,b,\rho\Delta}} u(\mathbf{x}).$$

Доказательство теоремы 2. Положим $\rho = (2\overline{\omega})^{-1}$, тогда ввиду неравенств (4) и определения П-последовательности, имеем включения

$$\widehat{Q}_{z_{j-1},z_j,\rho} \subset \Omega(f), \quad j = \overline{2,\infty}.$$

По лемме для пар $(z_{j-1},\mathbf{0}')$, $(z_j,\mathbf{0}')$ справедливы неравенства

$$u(z_{j-1},\mathbf{0}') \leqslant \widehat{H} \inf_{\overline{Q}_{z_{j-1},z_j,\rho\Delta_j}} u(\mathbf{x}) \leqslant \widehat{H} u(z_j,\mathbf{0}'), \quad j = \overline{2,\infty}. \tag{9}$$

Применяя неравенство (9) N раз, выводим соотношения

$$u(z_1,\mathbf{0}') \leqslant \widehat{H}^N \inf_{\overline{Q}_{z_N,z_{N+1},\rho\Delta_N}} u(\mathbf{x}) \leqslant \widehat{H}^N u(z_{N+1},\mathbf{0}'),\ N \geqslant 1.$$

Далее, пользуясь последним неравенством, несложно установить соотношения

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}^{z_{N+1}}(f)} u^{m+1}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant \int\limits_{Q_{z_N,z_{N+1},\rho\Delta_{N+1}}} u^{m+1}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant$$
$$\geqslant C_1 \inf_{Q_{z_N,z_{N+1},\rho\Delta_{N+1}}} u^{m+1}(\mathbf{x})\rho^{n-1}\Delta_{N+1}^n \geqslant$$
$$\geqslant C_1 \widehat{H}^{-(m+1)N} u^{m+1}(z_1,\mathbf{0}') \frac{\Delta_{N+1}^n}{(2\overline{\omega})^{n-1}}.$$

Применяя (4), находим, что

$$\overline{\omega}^{-N}\Delta_1 \leqslant \Delta_{N+1} \leqslant \Delta_1 \overline{\omega}^N, \quad N \geqslant 0.$$

В итоге установим неравенства

$$\int\limits_{\Omega_{z_N}^{z_{N+1}}(f)} u^{m+1}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant C_2 \exp(-N \ln(\overline{\omega}^{|n-1-m|}\widehat{H}^{m+1}))\Delta_{N+1}^{m+1}.$$

Теорема 2 доказана.

Следствием оценки (7) в области вращения $\Omega(f)$ с функцией f, удовлетворяющей условию (3), является неравенство

$$\|u\|_{L_{m+1}(\Omega_r^{r+1}(f))} \geqslant \widetilde{\mu} \exp\left(-\widetilde{K} \int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)}\right), \quad r \geqslant \widetilde{r},$$

которое доказывает точность оценки (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов Р. Х., Кожевникова Л. М. *Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях* // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2. – № 2. – С. 53-66.

2. Serrin J. *Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations* // Acta Math. – 1964. – No 111. – P. 101-134.

3. Trudinger N. S. *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic partial differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – No 20. – P. 721-747.

А. С. Кацунова

Сибирский федеральный университет,

askatsunova@gmail.com

О ФОРМУЛЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ПОВТОРНОГО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА КОШИ – СЕГЕ

Пусть B — единичный шар в $\mathbb{C}^n$, т. е. $B = \{z : |z| < 1\}$, где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$, а $S = \{z : |z| = 1\}$ — граница шара B.