А. В. Канатов

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, alexkanatov@yandex.ru

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ТИПА РАВЕНСТВА

Доклад посвящен обсуждению устойчивого к ошибкам исходных данных алгоритма двойственного типа [1], [2] для решения нелинейной задачи математического программирования общего вида в гильбертовом пространстве с ограничением типа равенства, содержащим аддитивно входящий в него бесконечномерный параметр

$$I_0(z) \to \inf, \quad I_1(z) = p, \quad z \in D \subset Z, \tag{1}$$

где $I_0 : D \to R^1$ — непрерывный функционал, $I_1 : D \to H$ – вполне непрерывный оператор, $D \subset Z$ — замкнутое ограниченное множество, Z, H — гильбертовы пространства, $p \in H$ – параметр.

Напомним, что метод двойственной регуляризации [1], [2] в случае задачи (1) с формальной точки зрения в простейшем варианте точных исходных данных представляет собой регуляризованную по Тихонову процедуру решения двойственной задачи максимизации с вогнутой целевой функцией

$$V_p(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in H, \quad V_p(\lambda) \equiv \inf_{z \in D} L_p(z, \lambda), \quad \lambda \in H,$$

$$L_p(z, \lambda) \equiv I_0(z) + \langle \lambda, I_1(z) - p \rangle, \quad z \in D,$$

т. е., другими словами, решение при каждом $\alpha > 0$ задачи максимизации с сильно вогнутой целевой функцией

$$R_p^\alpha(\lambda) \equiv V_p(\lambda) - \alpha \|\lambda\|^2 \to \max, \quad \lambda \in H,$$

и параллельное построение при стремлении к нулю параметра регуляризации α минимизирующей последовательности в исходной задаче (1).

Основная цель двойственного формализма в нелинейной задаче (1), в которой, вообще говоря, может и не быть оптимального элемента, состоит в конструктивном построении в ней минимизирующей последовательности допустимых элементов. При этом под минимизирующей последовательностью в задаче (1) понимается так называемое минимизирующее приближенное решение в смысле Дж. Варги, т. е. последовательность элементов $z^i \in D$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что $I_0(z^i) \leqslant \beta(p) + \delta^i$, $z^i \in D_p^{\varepsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ε^i, $i = 1, 2, \ldots$, где $\beta : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ — функция значений (S-функция) или, другими словами, зависящая от параметра обобщенная нижняя грань задачи (1):

$$\beta(p) \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \beta_\varepsilon(p), \quad \beta_\varepsilon(p) = \begin{cases} \inf\limits_{z \in D_p^\varepsilon} I_0(z), & D_p^\varepsilon \neq \emptyset; \\ +\infty, & D_p^\varepsilon = \emptyset. \end{cases}$$

Здесь $D_p^\varepsilon \equiv \{z \in D : \|I_1(z) - p\| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon \geqslant 0$.

В линейно-выпуклом случае задачи математического программирования (1), рассмотренном в [1], функция значений β является выпуклой и полунепрерывной снизу, а процесс конструирования минимизирующей последовательности в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации [1] теснейшим образом связан со свойствами ее субдифференцируемости, которая понимается в смысле выпуклого анализа.

Однако в нелинейной задаче функция значений β может и не быть выпуклой, и понятие субдифференцируемости в смысле выпуклого анализа использовать нельзя. В то же время, в самой общей ситуации функция β является полунепрерывной снизу и, стало быть, может быть субдифференцируемой в некотором обобщенном смысле. В этой связи в данной работе используется широко известное в современном негладком анализе понятие субдифференцируемости в смысле существования проксимального субградиента функции (см., например, [3]).

В работе показано, что если функция значений β является субдифференцируемой в точке $p \in H$ в смысле существования проксимального субградиента, то в задаче (1) существует так называемый обобщенный вектор Куна – Таккера, что, в свою очередь, приводит к рассмотрению при $c > 0$ конструкции модифицированной функции Лагранжа

$$L_{p,c}(z,\lambda) \equiv I_0(z) + \langle \lambda, I_1(z) - p \rangle + \\ + c\|I_1(z) - p\|^2, \quad z \in Z, \quad \lambda \in H, \quad (2)$$

и существованию у неё седловой точки. При этом оказывается, если задача (1) обладает вектором Куна – Таккера в упомянутом обобщенном смысле, то при некотором достаточно большом $c > 0$ в задаче минимизации модифицированной функции Лагранжа $L_{p,c}(z,\lambda) \to \inf$, $z \in \mathcal{D}$, минимизирующей является лишь последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $I_0(z^k) \to \beta(p)$, $I_1(z^k) \to p$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность.

Для построения в исходной задаче (1) минимизирующей последовательности в определенном выше смысле рассматривается модифицированная двойственная задача

$$V_{p,c}(\lambda) \to \sup, \ \lambda \in H, \qquad V_{p,c}(\lambda) \equiv \inf_{z \in D} L_{p,c}(z,\lambda)$$

и организуется при достаточно большом $c > 0$ регуляризованная по Тихонову процедура поиска ее максимума, т. е. решение при положительных $\alpha \to 0$ задач максимизации с сильно вогнутой целевой функцией

$$R^{\alpha}_{p,c}(\lambda) \equiv V_{p,c}(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \max, \;\; \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in H : \|\lambda\| \leqslant c\}.$$

В этом процессе важнейшую роль при построении минимизирующей последовательности в исходной задаче (1) играет лемма о представлении супердифференциала $\partial V_{p,c}$ вогнутой функции $V_{p,c}$ при условии полной непрерывности оператора $I_1 : D \to H$.

Лемма. *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) $\partial V_{p,c}(\lambda)$ вогнутой функции $V_{p,c}$ в точке $\lambda \in H$ выражается формулой*

$$\partial V_{p,c}(\lambda) = \overline{\mathrm{conv}}\,\{\lim_{i\to\infty}(I_1(z^i) - p) : \tag{3}$$

$$z^i \in D, \;\; L_{p,c}(z^i, \lambda) \to L_{p,c}(z, \lambda), \;\; i \to \infty\}.$$

Центральным предположением обсуждаемого двойственного формализма является предположение о возможности сколь угодно точной минимизации модифицированной функции Лагранжа (2). Именно это предположение в совокупности с предположением обобщенной субдифференцируемости функции значений β в точке p и приводит к конструктивному построению минимизирующей последовательности в исходной нелинейной задаче математического программирования (1).

Существенной особенностью данной работы является необходимость использования при обосновании формализма двойственной регуляризации [1] методов современного негладкого (нелинейного) анализа. Обсуждаемый формализм двойственной регуляризации в нелинейной задаче (1) можно трактовать как обобщение классического метода множителей Лагранжа для задач конечномерной условной оптимизации [4] на рассматриваемый класс задач бесконечномерной условной оптимизации.

Благодарю своего научного руководителя профессора М. И. Сумина за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)" Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт НК-13П-13)

ЛИТЕРАТУРА

1. Сумин М. И. *Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 602-625.

2. Сумин М. И. *Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47. – № 5. – С. 796-816.

3. Loewen P. D. Optimal control via nonsmooth analysi // CRM Proceedings and Lecture Notes. V. 2, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1993.

4. Бертсекас Д. *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа.* – М.: Радио и связь, 1987.