В. И. Жегалов, Н. Г. Кондратьева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

knatnat@yandex.ru

К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОБОБЩЕНИЯМ ЗАДАЧИ ГУРСА

Пусть $a_k,\ b_k,\ c_k \in C(\overline{D})$, где

$$D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1,\ 0 < z < z_1\}.$$

Задача 1 (Гурса). Найти регулярное в D решение $\theta = (u, v, w)$ системы уравнений

$$u_{xy} = b_1 v + c_1 w, \quad v_{xz} = a_2 u + c_2 w, \quad w_{yz} = a_3 u + b_3 v, \tag{1}$$

непрерывно продолжимое на грани параллелепипеда D, проходящие через начало координат и принимающее на этих гранях заданные значения

$$\begin{aligned} u(0,y,z) &= \varphi_1(y,z), & v(x,y,0) &= \psi_2(x,y), \\ u(x,0,z) &= \psi_1(x,z), & w(x,0,z) &= \varphi_3(x,z), \\ v(0,y,z) &= \varphi_2(y,z), & w(x,y,0) &= \psi_3(x,y). \end{aligned} \tag{2}$$

Граничные функции должны при этом совпадать на ребрах:

$$\varphi_1(0,z) = \psi_1(0,z),\ \varphi_2(y,0) = \psi_2(0,y),\ \varphi_3(x,0) = \psi_3(x,0). \tag{3}$$

Путем непосредственного интегрирования (1) с учетом (2) данная задача редуцируется к векторно-матричному уравнению

$$\theta(x,y,z) = \int_0^y \int_0^x L_1(x,y,z,\xi,\eta)\theta(\xi,\eta,z)\,d\xi d\eta +$$
$$+ \int_0^z \int_0^x L_2(x,y,z,\xi,\zeta)\theta(\xi,y,\zeta)\,d\xi d\zeta +$$
$$+ \int_0^y \int_0^z L_3(x,y,z,\eta,\zeta)\theta(x,\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta + f(x,y,z), \quad (4)$$

где компоненты вектора f зависят лишь от правых частей из (2), а матрицы L_k $(k = \overline{1,3})$ даются формулами

$$L_1 = \begin{Vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

На основе рассуждений из [1] (с. 20–26) доказана однозначная разрешимость уравнения (4) в терминах матричных резольвент некоторых вспомогательных интегральных уравнений.

Задача 2. Получается из задачи 1 путем замены условий (2) более общими соотношениями

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1k}(y,z)u(0,y,z) + \beta_{1k}(y,z)v(0,y,z) + \\
&\quad +\gamma_{1k}(y,z)w(0,y,z) = \omega_{1k}(y,z), \\
&\alpha_{2k}(x,z)u(x,0,z) + \beta_{2k}(x,z)v(x,0,z) + \\
&\quad +\gamma_{2k}(x,z)w(x,0,z) = \omega_{2k}(x,z), \\
&\alpha_{3k}(x,y)u(x,y,0) + \beta_{3k}(x,y)v(x,y,0) + \\
&\quad +\gamma_{3k}(x,y)w(x,y,0) = \omega_{3k}(x,y).
\end{aligned} \quad (5)$$

При этом $k = 1, 2$, а заданные коэффициенты и правые части в (5) принадлежат классу $C(\overline{D})$.

Предлагается вариант редукции этой задачи к предыдущей. Для шести искомых граничных значений задачи Гурса получается система нагруженных интегральных уравнений. Получены достаточные условия, позволяющие от указанной нагруженности освободиться. Это есть неравенства

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{11}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{11})\,[\gamma_{21}\,(\alpha_{22}\beta_{31}\gamma_{32} + \beta_{22}\gamma_{31}\alpha_{32} -{}&\\
\beta_{32}\gamma_{31}\alpha_{22} - \alpha_{31}\beta_{22}\gamma_{32}) - \gamma_{22}\,(\alpha_{21}\beta_{31}\gamma_{32} +{}&\\
\beta_{21}\gamma_{31}\alpha_{32} - \beta_{32}\gamma_{31}\alpha_{21} - \alpha_{31}\beta_{21}\gamma_{32})] \neq 0,&
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{22}\,(\alpha_{21}\beta_{31}\gamma_{32} + \beta_{21}\gamma_{31}\alpha_{32} - \beta_{32}\gamma_{31}\alpha_{21} - \alpha_{31}\beta_{21}\gamma_{32}) -{}&\\
- \gamma_{21}\,(\alpha_{22}\beta_{31}\gamma_{32} + \beta_{22}\gamma_{31}\alpha_{32} - \beta_{32}\gamma_{31}\alpha_{22} -{}&\\
-\alpha_{31}\beta_{22}\gamma_{32}) \neq 0,&
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{12}\,(\alpha_{11}\beta_{31}\gamma_{32} + \beta_{32}\gamma_{11}\alpha_{31} - \beta_{31}\gamma_{11}\alpha_{32} - \alpha_{11}\beta_{32}\gamma_{31}) -{}&\\
- \beta_{11}\,(\alpha_{12}\beta_{31}\gamma_{32} + \beta_{32}\gamma_{12}\alpha_{31} - \beta_{31}\gamma_{12}\alpha_{32} -{}&\\
-\alpha_{12}\beta_{32}\gamma_{31}) \neq 0,&
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}\,(\alpha_{22}\beta_{12}\gamma_{21} + \beta_{22}\gamma_{12}\alpha_{21} - \beta_{12}\gamma_{22}\alpha_{21} - \alpha_{22}\beta_{21}\gamma_{12}) -{}&\\
- \alpha_{12}\,(\alpha_{22}\beta_{11}\gamma_{21} + \beta_{22}\gamma_{11}\alpha_{21} - \beta_{11}\gamma_{22}\alpha_{21} -{}&\\
-\alpha_{22}\beta_{21}\gamma_{11}) \neq 0.&
\end{aligned}
\tag{9}
$$

В (6) все коэффициенты зависят от $(0,0)$, в (7), (8) и (9) — от $(x,0)$, $(y,0)$ и $(0,z)$ соответственно. При условиях (6) - (9) система уравнений для граничных значений Гурса распадается на три независимых подсистемы для пар (φ_1,φ_2), (ψ_1,φ_3), (ψ_2,ψ_3), но они не будут разрешены относительно искомых функций. Если потребовать выполнение неравенств

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}(y,z)\beta_{12}(y,z)-\beta_{11}(y,z)\alpha_{12}(y,z)\neq 0,\\&\alpha_{21}(x,z)\gamma_{22}(x,z)-\gamma_{21}(x,z)\alpha_{22}(x,z)\neq 0,\\&\beta_{31}(x,y)\gamma_{32}(x,y)-\gamma_{31}(x,y)\beta_{32}(x,y)\neq 0,\end{aligned}\tag{10}$$

то для каждой из указанных пар получится система, к которой применима методика, использованная для (4), то есть все граничные значения Гурса для исходной системы (1) определяются однозначно.

После того, как граничные значения Гурса будут вычислены, нужно будет еще потребовать для них условий согласования, то есть тождеств (3).

Таким образом, общее количество условий однозначной разрешимости задачи 2 состоит из семи неравенств и трех тождеств, накладываемых на 24 функции α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, ω_{ik} $(i=\overline{1,3},\ k=1,2)$.

В заключение заметим, что для более простой системы уравнений первого порядка, получаемой из (1) заменой u_{xy}, v_{xz}, w_{yz} соответственно на u_x, v_y, w_z, задача 1 была исследована Т. В. Чекмаревым [2], а задача 2 — Н. Х. Зомотом [3] и первым автором данного сообщения (см. также [1], с. 191–213).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госконтракт 02.740.11.0193).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Казан. матем. об-во, 2001. – 226 с.

2. Чекмарев Т. В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 9. – С. 1614-1622.

3. Зомот Н. Х. *Линейная характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка* // Казань: Казан. ун-т, 1997. - 20 с. Деп. в ВИНИТИ 10.12.98, № 394 - В98.

Т. В. Зверева

Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева, tz-84@mail.ru

О НАПРАВЛЕНИЯХ, ПАРАЛЛЕЛЬНО ПЕРЕНОСИМЫХ В НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЯХ, НА ПОВЕРХНОСТИ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим многомерную поверхность $V_m \subset C_n$, отнесенную к полуизотропному полуортогональному реперу $R = \{A_\lambda\}$, $\lambda, \mu = \overline{1, n+1}$. В данном репере справедливы соотношения $\omega_0^\alpha = 0$, $\omega_\alpha^j = \Lambda_{\alpha k}^j \omega_0^k$, $\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j$, $\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0$ $(i, j = \overline{1, m},\ \alpha, \beta = \overline{m+1, n})$.

Пусть поверхность V_m нормально оснащена [1] полем $(n-m)$-сфер $[P_i]$, $P_i = x_i^0 A_0 + A_i$, это поле определяется полем квазитензора x_i^0 : $dx_i^0 + x_i^0 \omega_0^0 - x_j^0 \omega_i^j + \omega_i^0 = x_{ij}^0 \omega_0^j$. Тогда на нормально оснащенной поверхности $V_m \subset C_n$ индуцируется нормальная связность $\nabla^\perp$.

Нормальное оснащение поверхности V_m в конформном пространстве C_n при отображении Дарбу в пространстве P_{n+1} индуцирует регулярную m-мерную квадратичную гиперполосу H_m, для которой базисной поверхностью является образ $\widetilde{V_m} \subset Q_n^2$ подмногообразия V_m. Рассмотрим регулярную квадратичную гиперполосу $H_m \subset P_{n+1}$, взаимным и двойственным