М. Ф. Давлетбаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

dmarsel@list.ru

ФРАКТАЛ РОУЗИ

В своей работе [1] Жерар Роузи рассмотрел геометризацию некоторых алгебраических объектов. Одним из примеров, приведенных им, является так называемая подстановка трибоначи $\sigma : \mathbb{N}_3 \to \mathbb{N}_3$, действующая на последовательностях из элементов множества $\{1, 2, 3\}$ и определяемая равенствами

$$\sigma(1) = 12; \quad \sigma(2) = 13; \quad \sigma(3) = 1.$$

Постоянной точкой данной подстановки (т. е. $\sigma(n) = n$) является бесконечная последовательность $n = 12131211213\ldots$.

Запишем абелеву матрицу подстановки трибоначи:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения её собственных значений решаем уравнение

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0. \tag{1}$$

Обозначим через α один из комплексных корней уравнения (1).

Геометризация подстановки трибоначи приводит к *фракталу Роузи* $\mathcal{R}$ (рис. 1). $\mathcal{R}$ называем центральной плиткой (*central tile*). Она состоит из меньших подплиток $\mathcal{R}_1$ (большая подплитка), $\mathcal{R}_2$ (средняя подплитка), $\mathcal{R}_3$ (меньшая подплитка).

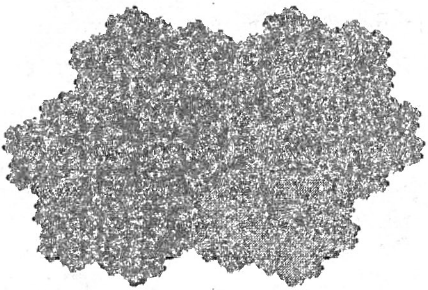

Рис. 1

Одним из основных свойств фрактала Роузи является возможность замостить им плоскость. Плоскость можно замостить как одинаковыми плитками, так и плитками различного размера (рис. 2).

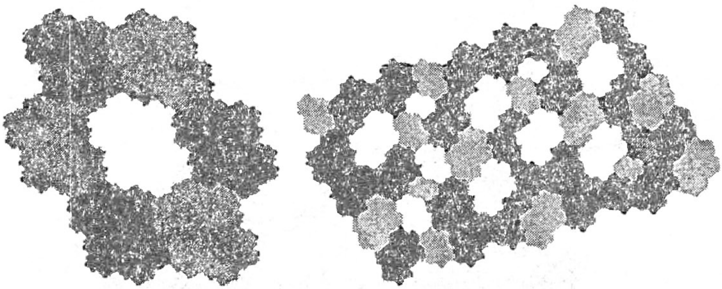

Рис. 2

Следующие факты считаем известными:

1) множества $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ пересекаются только по границе;

2) фрактал Роузи гомеоморфен кругу, т. е. он односвязен, и его граница является непрерывной кривой;

3) фрактал Роузи можно представить как аттрактор системы итерированных функций, ассоциированной с ориентированным графом (*graph directed iterated function system*):

$$\mathcal{R}_1 = \alpha(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3), \quad \mathcal{R}_2 = \alpha(\mathcal{R}_1) + 1, \quad \mathcal{R}_3 = \alpha(\mathcal{R}_2) + 1. \quad (2)$$

В ходе исследований получены следующие результаты:

1) фрактал Роузи является аттрактором системы итерированных функций:

$$T_1(x) = \alpha x, \quad T_2(x) = \alpha^2 x + 1, \quad T_3(x) = \alpha^3 x + \alpha + 1;$$

2) фрактал Роузи представим в виде

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0}^{\infty} x_i \alpha^i | x_i \in \{0, 1\} \right\},$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0}^{\infty} x_i \alpha^i | x_i \in \{0, 1\},\ x_i x_{i+1} x_{i+2} = 0 \right\};$$

3) фрактал Роузи является аттрактором системы итерированных функций (рис. 3)

$$f_1(x) = \alpha x, \quad f_2(x) = \alpha x + 1;$$

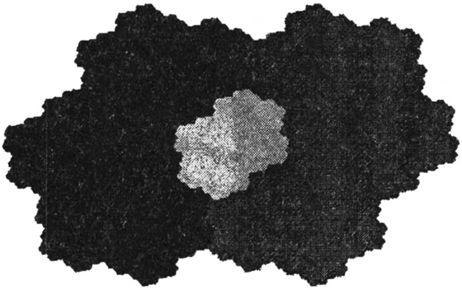

Рис. 3

4) хаусдорфова размерность границы фрактала Роузи $s > 1$;

5) часть границы фрактала Роузи между точками A и B имеет центр симметрии (рис. 4);

6) фрактал Роузи имеет центр симметрии.

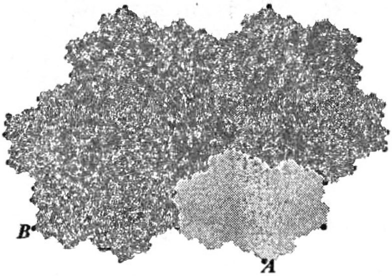

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Rauzy G. *Nombres algebriques et substitutions* // Bull. Soc. Math. France. – 1982. – V.110. – No 2. – P. 147-178.

В. Г. Демиденко

Институт вычислительных технологий СО РАН,

demidenko.v@ngs.ru

О ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах [1] – [3] мы проводили исследования задачи о восстановлении коэффициентов системы линейных разностных уравнений

$$\mathbf{G}(k+1) = W\mathbf{G}(k), \quad k = 1, \ldots, M-1, \tag{1}$$

где $\mathbf{G}(k) = (G_1(k), \ldots, G_N(k))^{\mathrm{T}}$, а $W = (w_{ij})$ — искомая числовая матрица размера $N \times N$, такая, что решения системы (1) наиболее точно аппроксимируют векторы наблюдений

$$\mathbf{y}(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_N(k) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, M. \tag{2}$$