



Рис. 2. Изолинии давления: слева — начальная и справа — конечная формы

В докладе представлены более подробные детали алгоритма и приведены результаты расчетов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Васильев Е. И., Гонтаренко А. А. Численное решение обратной задачи для осесимметричного тела в сжимаемой среде // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2009. — Т. 39. — С. 12-14.

Е. Н. Горечин, В. Н. Кутрунов

Тюменский государственный университет,
 gorechin-egor@mail.ru, kvnkvnkvn@rambler.ru

КВАТЕРНИОННАЯ ФОРМУЛА СТОКСА

Рассмотрим классические варианты теоремы Стокса, например, [1]. Пусть ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, тогда

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \circ \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_l d\mathbf{r} \circ \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_l d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla)\Phi(\mathbf{r}) = \oint_l d\mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}).$$

Здесь S — односвязная, регулярная поверхность, ограниченная регулярной замкнутой кривой l , $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ — векторный элемент поверхности (вектор площадки, сонаправленный с единичной нормалью \mathbf{n} этой площадки), $d\mathbf{r} = dr\mathbf{k}$ — векторный элемент (дифференциал) кривой l , совпадающий по направлению с единичным касательным вектором \mathbf{k} . Ориентация вектора нормали и вектора, касательного к кривой (направления обхода), согласованы между собой по правилу правого винта. Будем считать, что указанная поверхность расположена в некотором поверхностно-односвязном объеме V и в этом объеме заданы векторная $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и скалярная $\Phi(\mathbf{r})$ функции, имеющие всюду непрерывные частные производные. Считается, что именно при этих ограничениях имеют место записанные варианты теоремы Стокса, связывающие интегрирования по поверхности и ее границе.

Наша задача — записать теоремы Стокса для кватернионных функций в самых комфортных условиях, поэтому предположим, что поверхность S является ляпуновской (достаточно и гладкости), а ограничивающая ее кривая непрерывно дифференцируема. В этом случае можно снизить требования к функциям $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$. Действительно, рассмотрим оператор $d\mathbf{S} \times \nabla = dS\mathbf{n} \times \nabla$. Так как нормаль существует в каждой точке поверхности S и функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ дифференцируемы в объеме, к ним всегда можно применить оператор $(\mathbf{n} \times \nabla)$. Этот оператор присутствует в каждом из поверхностных интегралов теоремы Стокса, поэтому заслуживает пристального внимания. Если бы поверхность S была плоской, а декартова система координат выбрана так, что одна из координатных осей, например, третья, совпадает по направлению с нормалью \mathbf{n} ,

то указанный оператор содержал бы дифференцирование только по двум первым координатам, то есть дифференцирование только в плоскости. Действительно, операция дифференцирования по третьему направлению исчезает за счет свойств векторного произведения:

$$\mathbf{n} \times \nabla = \mathbf{n} \times \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}.$$

По этой причине нет необходимости предполагать задания и дифференцируемости функций $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$ в некотором объеме V . Достаточно, чтобы они были заданными и дифференцируемыми только в плоскости. В случае неплоской гладкой поверхности S этот вывод остается в силе, то есть можно считать, что указанные функции заданы только на поверхности. Отметим также, что этот оператор является инвариантным, иначе говоря, результат его действия не зависит от выбранной системы координат. Будем называть его еще оператором касательного дифференцирования по поверхности. Другой естественный инвариантный дифференциальный оператор, о котором следует здесь упомянуть, имеет вид $(\mathbf{n} \times \nabla)$. Этот оператор является оператором дифференцирования по нормали к поверхности и применение его к функциям в точках поверхности S требует знания этих функций в окрестности поверхности.

Рассмотрим кватернион, составленный из векторной и скалярной функций, входящих в интегралы теоремы Стокса — $Z(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r})$ и кватернион $d\mathbf{S} \times \nabla$. Вычислим произведение этих кватернионов, пользуясь скалярно-векторной интерпретацией кватернионного умножения:

$$\begin{aligned} (d\mathbf{S} \times \nabla)(\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r})) &= \\ &= (d\mathbf{S} \times \nabla)\Phi(\mathbf{r}) - (d\mathbf{S} \times \nabla) \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Рассматривая радиус-вектор \mathbf{r} как мнимый кватернион, можно вычислить и следующее произведение кватернионов:

$$d\mathbf{r}Z(\mathbf{r}) = d\mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}) - d\mathbf{r} \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) + d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Теперь, проинтегрировав первое произведение по поверхности, а второе — по ее контуру с учетом всех вариантов теоремы Стокса, получим

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla)Z(\mathbf{r}) = \oint_l d\mathbf{r}Z(\mathbf{r}).$$

Чтобы получить окончательную кватернионную запись теоремы Стокса, необходимо избавиться от векторного произведения в дифференциальном операторе и заменить его на кватернионное произведение. Это легко сделать с помощью операции сопряжения. Окончательный результат имеет вид

$$\frac{1}{2} \int_S d\mathbf{S}(\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})Z(\mathbf{r}) = \oint_l d\mathbf{r}Z(\mathbf{r}).$$

Получена кватернионная форма теоремы Стокса, включающая в себя все ее классические варианты. Здесь кватернионный дифференциальный оператор $\mathbf{n} \times \nabla = (\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})/2$ является оператором касательного дифференцирования по поверхности, причем в левой части формулы сначала вычисляется векторное произведение, а затем орты интерпретируются как мнимые единицы кватерниона. В зависимости от потребностей используется либо левая, либо правая формы записи. Эта теорема верна во всех случаях, когда верна классическая теорема Стокса.

Распространим эту теорему на случай замкнутых поверхностей S . Для этого разобьем всю поверхность на две. С помощью сферы достаточно малого радиуса ϵ с центром в произ-

вольной точке $\mathbf{r}_0 \in S$ вырежем ее ϵ -окрестность S_ϵ и вычислим интеграл по поверхности с учетом этого разбиения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S dS(\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})Z(\mathbf{r}) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_\epsilon} dS(\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})Z(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int_{S-S_\epsilon} dS(\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})Z(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Пусть $\epsilon \rightarrow 0$. Так как функция $Z(\mathbf{r})$ по предположению в каждой точке поверхности дифференцируема по касательному направлению, то интеграл по S_ϵ обращается в нуль на основании теоремы о среднем, интеграл по $S - S_\epsilon$ преобразуется к криволинейному интегралу по теореме Стокса:

$$\frac{1}{2} \int_S dS(\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})Z(\mathbf{r}) = \oint_{l_\epsilon} d\mathbf{r}Z(\mathbf{r}).$$

Здесь l_ϵ — замкнутая кривая, полученная пересечением сферы радиуса ϵ и поверхности S . Так как эта кривая находится в бесконечно малой окрестности точки \mathbf{r}_0 , то функцию $Z(\mathbf{r})$ вследствие ее непрерывности можно считать постоянной и вынести из под знака интеграла. Оставшийся интеграл представляет сумму замкнутого векторного многоугольника, поэтому равен нулю. Следовательно, в декларируемых условиях теорема Стокса для замкнутой поверхности имеет вид

$$\int_S dS(\mathbf{n}\nabla - \overline{\mathbf{n}\nabla})Z(\mathbf{r}) = \int_S dS(\mathbf{n} \times \nabla)Z(\mathbf{r}) = 0.$$

Здесь и далее нормаль \mathbf{n} является внешней по отношению к поверхности S .

Уместно обратить внимание на одну аналогию. Для интегрирования по замкнутому криволинейному контуру l имеет место формула

$$\oint \frac{df}{dl} dl = \oint df = 0.$$

Здесь производную df/dl можно трактовать как *производную по направлению, касательному к кривой*. Этот интеграл имеет физические приложения. Одна из физических формулировок звучит так: "Работа потенциальных сил по любому замкнутому пути равна нулю". Интеграл Стокса, в соответствии с нашим определением, содержит *производную по касательному направлению к поверхности*, и этот интеграл также равен нулю по любой замкнутой, но теперь *поверхности*, расположенной в области определения дифференцируемой функции. Повидимому имеется возможность развития аналогичных физических интерпретаций этого интеграла, а его кватернионная запись дает многообразие скалярно-векторных трактовок.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
2. Михлин С. Г. *Курс математической физики*. – М.: Наука, 2002.
3. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.