Н. А. Бакланова

Новосибирский государственный университет,

nbaklanova@gmail.com

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА НА ПРЕДЕЛЬНЫХ УРОВНЯХ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

В 1990-е С. С. Гончаровым и А. Сорби было начато исследование вычислимых нумераций для произвольных уровней арифметической иерархии. С. С. Гончаровым и С. А. Бадаевым был решен вопрос о существовании минимальных нумераций и минимальных накрытий на уровнях арифметической иерархии выше Σ^0_2. Таким образом, вопрос о существовании пустых интервалов в полурешетке Роджерса был изучен достаточно полно. В дальнейшем С. Ю. Подзоров [1] исследовал структуру начальных сегментов полурешетки Роджерса. Все результаты были объединены в статье вышеупомянутых авторов [4], в которой исчерпывающе описана структура начальных сегментов полурешетки Роджерса арифметических нумераций конечного уровня. В настоящем докладе эти результаты распространены на полурешетки Роджерса бесконечных уровней арифметической иерархии.

Определение 1. *Произвольное сюръективное отображение α множества натуральных чисел на непустое множество A называется нумерацией A. Пусть α и β — нумерации A. Нумерация α сводится к β $(\alpha \leqslant \beta)$, если существует вычислимая функция f, такая, что $\alpha(n) = \beta(f(n))$ для любого $n \in \omega$. Нумерации α и β называются эквивалентными $(\alpha \equiv \beta)$, если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$.*

Определение 2. *Нумерация* α *семейства* A Σ^0_{n+1}*-множеств, где* $n \geqslant 0$, *называется* Σ^0_{n+1}*-вычислимой, если существует вычислимая функция* f, *такая, что для любого* m $\varphi_{f(m)}$ *является* Σ^0_{n+1}*-формулой арифметики Пеано и* $\alpha(m) = \{x \in \omega | \mathbb{N} \vDash \varphi_{f(m)}(\overline{x})\}$. *Множество* Σ^0_{n+1}*-вычислимых нумераций* A *обозначается* $Com^0_{n+1}(\mathcal{A})$.

Определение 3. *Верхняя полурешетка* $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{A})$ *называется полурешеткой Роджерса класса арифметических нумераций* A.

Определение 4. *Через* ε *обозначается семейство всех в. п. подмножеств натурального ряда. Частично упорядоченное множество* $< \varepsilon, \subseteq >$ *является решеткой, конечные подмножества* $\mathbb{N}$ *образуют идеал этой решетки. Фактор-решетка по этому идеалу обозначается* $< \varepsilon^*, \subseteq{}^* >$. *Элемент* ε^*, *состоящий из конечных множеств, обозначим* 0.

Определение 5. *Определим множества, входящие в предельный уровень гиперарифметической иерархии:*

- $\Sigma_\omega = \bigcup\limits_n \Sigma^0_n$;
- $\Sigma^R_\omega = \{X |\ X$ *в. п. относительно* $0^{(\omega)}\}$;
- $\Sigma^K_\omega = \{X|$ *существует вычислимая последовательность арифметических формул* $\varphi_{g(n)}(x)$, $n < \omega : x \in X \Longleftrightarrow \mathbb{N} \vDash \bigvee \varphi_{g(n)}(x)\}$ [3].

Доказано, что для любого варианта определения Σ_ω начальные сегменты полурешетки Роджерса имеют одинаковую структуру.

Теорема 1. *Для любой нумерации* $\alpha \in Com_\omega(S)$ $(Com_\omega^R(S)$, $Com_\omega^K(S))$ *существует нумерация* $\beta \in Com_\omega^0(S)$ $(Com_\omega^R(S)$, $Com_\omega^K(S))$, *такая, что* $\beta \equiv {}_{0'}\alpha$ *и* 1) *если* S *конечно, то* $\langle\hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle\varepsilon^*, \subseteq{}^*\rangle$;

2) *если* S *бесконечно, то* $\langle\hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle\varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq{}^*\rangle$.

С использованием того факта, что элементарная теория ε^* является наследственно неразрешимой, из теоремы получаем следующее

Следствие. *Элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса* $R_\omega(A)$ $(R_\omega^R(A), R_\omega^K(A))$ *является наследственно неразрешимой.*

Объединяя этот результат с результатом С. Ю. Подзорова для конечных уровней, получаем следующее утверждение

Теорема 2. *Элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса* $R_\delta(A)$ (*а также* $R_\delta^R(A), R_\delta^K(A)$ *для предельных ординалов*), *где* $\delta \geqslant 2$ — *конструктивный ординал, является наследственно неразрешимой.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-3606.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Подзоров С. Ю. *Начальные сегменты в полурешетках Роджерса* Σ_n^0*-вычислимых нумераций* // Алгебра и логика. – 2003. – Т. 42. – № 2. – С. 211-226.

2. Гончаров С. С., Сорби А. *Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса* // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36. – № 6. – С. 621-641.

3. Ash C. J., Knight J. F. *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy.* – Elsevier, Amsterdam, 2000.

4. Badaev S., Goncharov S., Podzorov S., Sorbi A. *Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings* // Computability and Models, S. B. Cooper and S. S. Goncharov eds. – New York: Kluwer/Plenum Publishers, 2003. – P. 45-77.

Е. Ю. Балакина

Новосибирский государственный университет,

issc2009@gmail.com

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Рассматривается процесс переноса частиц (в частности, фотонов) в рассеивающей и поглощающей среде. Целью работы является реконструкция радиационного поля при известных характеристиках среды, то есть нахождение плотности потока частиц при известных выходящем потоке частиц и коэффициентах уравнения.

В качестве математической модели взято линейное интегродифференциальное уравнение переноса, иногда называемое линейным уравнением Больцмана:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,E) + \mu(r,E) f(r,\omega,E) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} k(r,\omega\cdot\omega',E,E') f(r,\omega',E')\,dE'\,d\omega' + J(r,\omega,E). \quad (1)$$

Здесь r — пространственная переменная, $r \in G \subset \mathbb{R}^3$; G — выпуклая ограниченная область; ω — вектор, указывающий направление движения потока частиц, $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$; E — энергия движущейся частицы, $E \in I = [E_1, E_2]$.