УДК 5530.12+531.51

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СКМ MATHEMATICA

Т.В. Капустина[1]

1 *tv_kapustina@mail.ru*; Казанский федеральный университет

Описаны способы создания динамических иллюстраций к математическим задачам в СКМ Mathematica.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамические иллюстрации.

СКМ Mathematica, начиная с версии 6.0 (а текущей версией является 10.0), имеет в своём арсенале несколько встроенных функций для динамического представления математических объектов (причём не только графических, но и, как это ни удивительно, алгебраических выражений или их значений). При компьютерном моделировании математических объектов и явлений часто удачно используются динамические иллюстрации. Технология создания динамических иллюстраций (то есть анимации статических математических образов) в среде Mathematica в последних версиях этой компьютерной системы Mathematica претерпела значительные изменения по сравнению с предыдущими версиями (до 5.0): она значительно упростилась и приобрела новые инструменты (например, одномерные и двумерные ползунки для целенаправленного управления анимацией). Основными встроенными функциями для создания учебной анимации являются Animate и Manipulate. С ними можно ознакомиться через справочное меню Help / Documentation Center главного меню системы (раздел Visualization and Graphics / Dynamic Visualization). Многочисленные примеры, содержащиеся в справочном разделе, позволяют быстро понять, как пользоваться этими функциями.

Рассмотрим некоторые типы математических задач (прежде всего учебных), где будут полезны динамические иллюстрации.

1. Задачи с параметрами

В методике решения задач с параметрами, которые в настоящее время являются неотъемлемой частью содержания школьного математического образования, удачно используется графический подход, который основан на графическом изображении процесса, происходящего при изменении параметра. Графический подход зачастую способен дать основную идею решения задачи с параметрами. Однако он требует достаточно больших временных затрат как при объяснении учителя, так и при самостоятельной работе учащихся. Новым инструментом осуществления идей графического подхода могут стать СКМ, в частности, Mathematica. И если в настоящее время трудно предполагать, что широким массам учащихся доступны подобные программные продукты, то учитель математики просто обязан использовать их в своей работе. Применение СКМ обеспечит быстрое и доступное создание динамической иллюстрации любой задачи с параметром (параметрами), за редкими исключениями. При этом автоматически будут выполняться следующие принципы информатизации обучения математике: целесообразности (применять компьютер в обучении только тогда, когда это эффективно с методической точки зрения); новых задач (суть которого в том, чтобы не перекладывать на компьютер традиционно сложившиеся приёмы и методы, а перестраивать их в соответствии с новыми возможностями); предпрограммирования опорных задач; максимальной наглядности, а также традиционные дидактические принципы.

Рассмотрим пример задачи с параметрами из ЕГЭ. Требуется решить следующую задачу: Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x+a|| = 9|x-3|$ имеет два корня.

После очевидных преобразований получим систему, эквивалентную исходному уравнению:

$$\begin{cases} \dfrac{27}{13} \leqslant x \leqslant \dfrac{27}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} |x+a| = -x + 9|x-3|, \\ |x+a| = 7x - 9|x-3|. \end{array} \right. \end{cases}$$

Идея графического подхода здесь совершенно прозрачна: построив график левой части совокупности $y = |x+a|$ и объединение графиков $y = -x + 9|x-3|$ и $y = 7x - 9|x-3|$ на промежутке $\left[\dfrac{27}{13}, \dfrac{27}{5}\right]$, два решения получим в случае пересечения этих графиков в двух точках. С помощью встроенной функции Plot строятся графики обоих уравнений (дополнительные опции касаются цвета и толщины линии и количества элементарных отрезков, задающих линию), встроенная функция Show объединяет их на одном чертеже, Animate оживляет графики в пределах изменения a от -30 до 27. В верхней строке рамки возникает меню анимации; можно ускорять или замедлять движение, останавливать его, вручную с помощью бегунка менять положения кривых (на кадре анимации изображен момент пересечения графиков).

```
gr1 = Plot[{−x + 9Abs[x − 3], 7x − 9Abs[x − 3]}, {{x, 27/13, 27/5},
    PlotStyle → {{Hue[0.7], Thickness[0.006]}, {Hue[0.7],
    Thickness[0.009]}}, AspectRatio → Automatic];
Animate[Show[gr1, Plot[Abs[x + a], {x, −a − 27, −a + 27},
    PlotStyle → {Hue[0.95], Thickness[0.007]}, AspectRatio → 1.5Automatic],
    PlotRange → {{−37, 25}, {−4, 27}}], {a, −30, 27}]
```

Средства анимации, предоставляемые СКМ, позволяют учителю осуществлять обучение на качественно более высоком уровне использования конструктивно-комбинаторных возможностей, причём не требуется создавать принципиально новую («компьютерную») методику, а продумывать сочетание привычных форм и приёмов с новыми подходами и способами.

2. Иллюстрации хрестоматийных теоретических выводов

Приведем пример динамической иллюстрации известного теоретического вывода из школьных учебников: получение графика функции $y = \sin x$. Слева изображена тригонометрическая окружность с вращающимся радиус-вектором, а справа — получающийся известным методом график синуса.

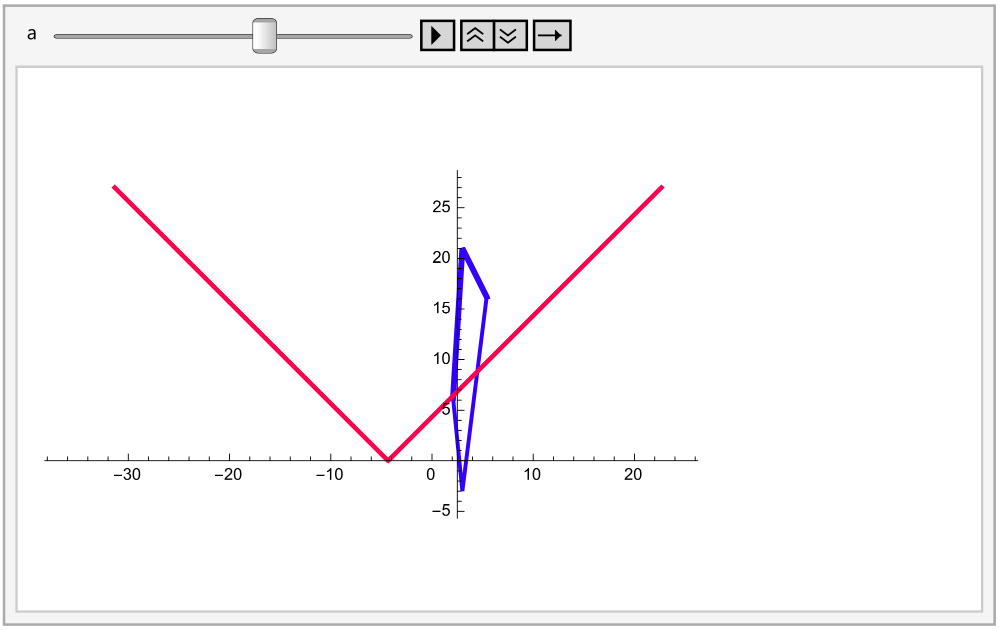

Рис. 1. Пример анимации к задаче с параметрами.

```
Animate[Show[{ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, −Pi, Pi},
    PlotRange → {{−1.1, 3Pi}, {−1.1, 1.1}},
    PlotStyle → {Lighter[Blue], Thickness[0.003]}],
    ParametricPlot[{b + 2, Sin[0 + b]}, {b, 0, s},
    PlotStyle → {Darker[Blue], Thickness[0.005]}],
    ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, s},
    PlotStyle → {Red, Thickness[0.005]}],
    Graphics[{Line[{{s + 2, Sin[0 + s]}, {s + 2, 0}}],
    Line[{{0, 0}, {Cos[s], Sin[s]}}], Darker[Green],
    Line[{{Cos[s], Sin[s]}, {s + 2, Sin[0 + s]}}], Red,
    Thickness[0.005], Line[{{2, 0}, {s + 2, 0}}]}]}], {s, 0, 2Pi},
    AnimationDirection → ForwardBackward]
```

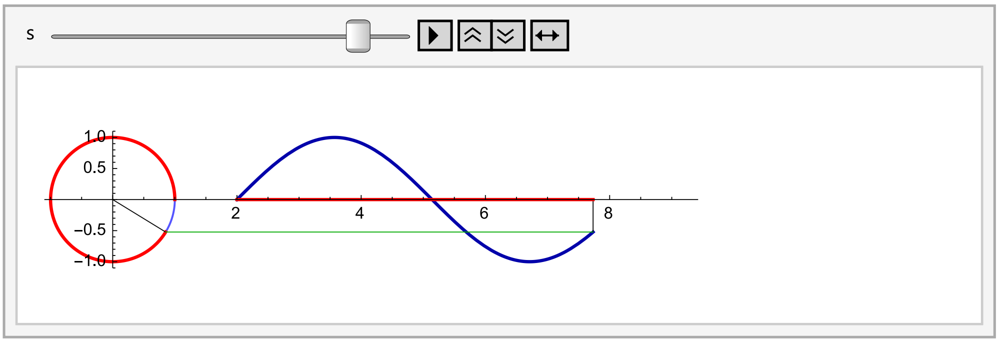

Рис. 2. Пример анимации к выводу графика функции $y = \sin x$.

3. Построение изображений плоских кривых по их определениям

В качестве примера приведем астроиду. Ее определение: постоянный отрезок AB скользит своими концами по осям прямоугольной декартовой системы координат Oxy; треугольник AOB достраивается до прямоугольника $AOBC$ и из точки C проводится перпендикуляр CM к отрезку AB; астроидой называют геометрическое место точек M. Динамическая иллюстрация получения изображения астроиды:

```
Animate[Show[ParametricPlot[Cos[t]^3, Sin[t]^3, {t, 0, s},
  PlotRange → {{−1, 1}, {−1, 1}}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.005]}],
    Graphics[{{Darker[Green], Thickness[0.005],
    Line[{{Cos[s], 0}, {0, Sin[s]}}]}, {Dashed,
    Line[{{Cos[s], Sin[s]}, {0, Sin[s]}}],
    Line[{{Cos[s], 0}, {Cos[s], Sin[s]}}]},
    Line[{{Cos[s]^3, Sin[s]^3}, {Cos[s], Sin[s]}}], PointSize[0.015],
    Blue, Point[{Cos[s]^3, Sin[s]^3}]}]], s, 0.001, 2Pi},
    AnimationDirection → ForwardBackward]
```

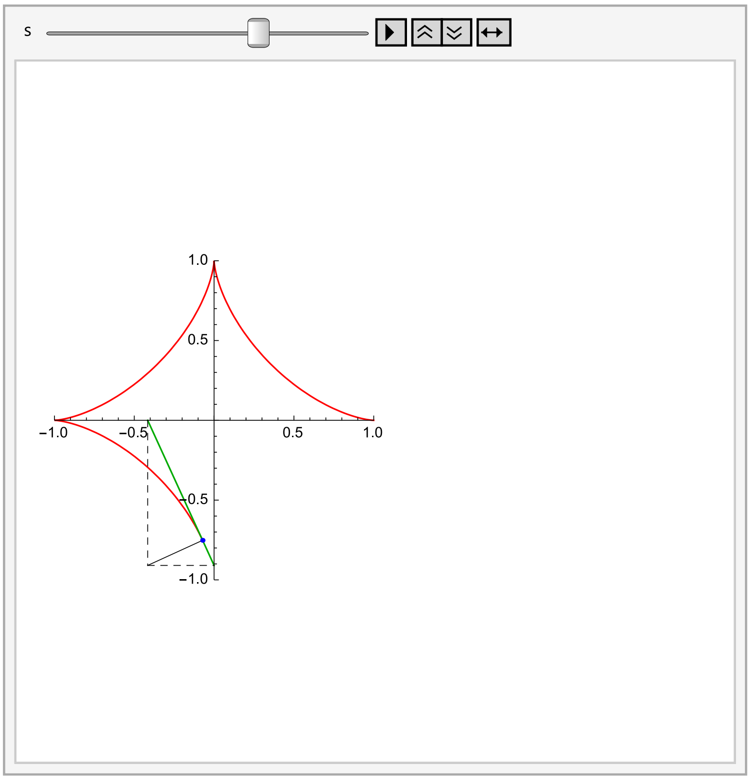

Рис. 3. Анимация к построению астроиды.

4. Построение образов фигур при геометрических преобразованиях плоскости

Тема «Геометрические преобразования плоскости» присутствует в программе школьного курса геометрии и в программе вузовского курса «Аналитическая геометрия». Практика обучения геометрии и в школе, и в вузе показывает, что ввиду недостаточного количества аудиторных занятий, предусмотренных учебным планом, не удаётся уделить должное внимание построению чертежей, изображающих геометрические фигуры и их образы в том или ином геометрическом преобразовании; в лучшем случае рассматривается построение образов простейших геометрических фигур — точек и отрезков. Между тем, изучение взаимного расположения фигур (многоугольников, окружностей и др.) и их образов важно для формирования образных, конкретных представлений о геометрических преобразованиях в дополнение к абстрактным представлениям, которые дает теория.

Можно реализовать следующие динамические иллюстрации геометрических преобразований плоскости: вместе с исходным положением фигуры показать изменение положения образа фигуры при: 1) параллельном переносе в зависимости от длины вектора переноса; 2) повороте вокруг заданного центра в зависимости от угла поворота; 3) гомотетии с заданным центром в зависимости от коэффициента гомотетии; 4) при косом сжатии в зависимости от коэффициента сжатия или при сдвиге вдоль оси в зависимости от коэффициента сдвига (не путать это родственное преобразование с параллельным переносом). Сложнее сформировать динамическую иллюстрацию осевой симметрии, поскольку это связано с поворотом плоскости вокруг оси симметрии в пространстве, но и это возможно осуществить в среде Mathematica.

Методическое значение динамических иллюстраций в том, что они повышают уровень наглядности излагаемого материала, показывая объекты и процессы в динамике, в отличие от статических иллюстраций. Возможность осуществления динамических иллюстраций в системе Mathematica представляет собой благодатную почву для преподавателей и методистов и требует изучения и внедрения в практику преподавания математики как в вузе, так и в школе.

Литература

1. Баутин Н. Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М.: Наука., 1990. — 488 с.

2. Капустина Т. В. Компьютерное сопровождение курса геометрии для бакалавров педагогического направления / Т. В. Капустина // Проблемы теории и практики обучения математике: сборник науч. работ, представленных на Междунар. науч. конфер. «65-е Герценовские чтения». — СПб.: Изд-во РПГУ им. А. И. Герцена, 2012. — С. 314-316.

DYNAMIC REPRESENTATION OF MATHEMATICAL OBJECTS
IN CAS MATHEMATICA

T.V. Kapustina

Metods for creating dynamic illustrations on mathematical problems in CAS Mathematica are described.

Keywords: computer modelling, dynamic illustrations.