

2. Шурыгин В. В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами* // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. – М.: ВИНТИ, 1987. – Т. 19. – С. 3-22.

3. Азарми С. *Многообразия над грассмановыми алгебрами* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2009. – Т. 39. – С. 116-118.

4. Jadczyk A., Pilch K. *Superspace and supersymmetries* // Commun. Math. Phys. – 1980. – V. 78. – P. 373-390.

5. Владимиров В. С., Волович И. В. *Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление* // Теор. и матем. физика. – 1984. – Т. 59. – № 1. – С. 3-27.

Л. А. Александрова

*Санкт-Петербургский государственный университет
гражданской авиации, тутила@mail.ru*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПЛАВНОГО КОНТУРА ОСНОВАНИЯ
ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ
ПРИ НАЛИЧИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО
ВОДОУПОРА**

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация (по закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$) под водонепроницаемым подземным контуром заглубленной плотины $ABC_1B_1A_1$ (см. рис.). Пусть контур основания плотины AA_1 состоит из двух вертикальных отрезков AB и A_1B_1 одинаковой длины d_1 , среднего горизонтального отрезка CDC_1 длиной $2l_1$ и примыкающих к ним дуг кривых BC и B_1C_1 с постоянной величиной $|w| = v_0$ скорости их обтекания. Снизу область течения ограничена криволинейным

водоупором GG_1 , состоящим из двух криволинейных участков GF и F_1G_1 , а также горизонтального отрезка FEF_1 , на них, как и на участках подземного контура плотины BC и B_1C_1 , величина скорости фильтрации также постоянна: $|w| = u_0$ ($0 < u_0 < v_0$). Предполагается, что границы верхнего и нижнего бьефов горизонтальные, действующий на сооружение напор H , скорость обтекания v_0 , фильтрационный расход Q и глубина T горизонтального участка водоупора FEF_1 считаются заданными.

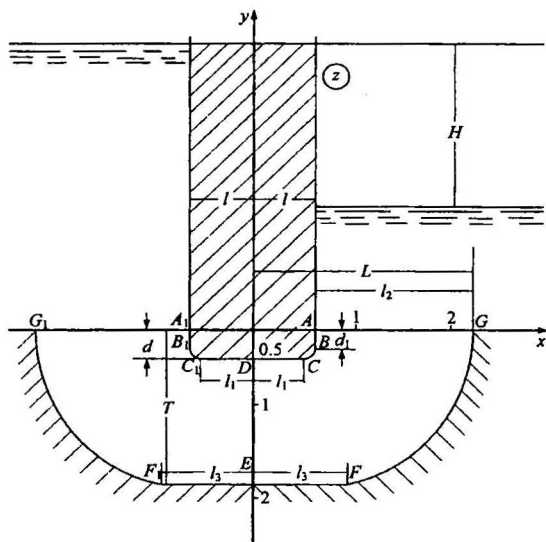


Рис.

Введем комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$, где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока (область изменения переменной ω представляет собой прямоугольник $-0.5H < \text{Re } \omega < 0.5H$, $0 < \text{Im } \omega < Q$) и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к κH и H . Задача

состоит в определении положения кривых BC , B_1C_1 , G_1F_1 и FG при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} A_1G_1 : y = 0, \varphi = -0.5H; & \quad A_1B_1 : x = -l, \psi = Q; \\ C_1DC : y = -d, \psi = Q; & \quad AB : x = l, \psi = Q; \\ AG : y = 0, \varphi = 0.5H; & \quad F_1EF : y = -T, \psi = 0; \\ B_1C_1, BC : |w| = v_0; & \quad G_1F_1, FG : |w| = u_0, \psi = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

таким образом, чтобы скорость фильтрации вдоль криволинейных участков подземного контура плотины BC и B_1C_1 , а также горизонтального F_1F и криволинейных участков G_1F_1 и GF имела постоянные значения v_0 (заданное) и u_0 (искомое) соответственно.

Рассматриваемая задача в подобной постановке относится к так называемым смешанным обратным краевым задачам теории фильтрации, т. е. к задачам, в которых одни участки границы области течения известны, а другие подлежат определению. Отметим, что впервые обратный подход к фильтрационному расчету плавного подземного контура плотин был применен в [1], когда известные участки контура прямолинейны, а на искомых скорость обтекания постоянна. Эта работа дала толчок к развитию целого направления — отысканию контуров гидротехнических сооружений по каким-либо заданным на них свойствам — и породила многочисленные исследования [2] — [4], принадлежащие, главным образом, казанской школе математиков и механиков (М. Т. Нужин, Г. Г. Тумашев, Л. А. Аксентьев, Н. Б. Ильинский, Р. Б. Салимов, Н. Д. Якимов, А. М. Елизаров и др.).

В отличие от данных работ ниже дается не только построение плавного контура плотины, но и определяется очертаение подстилающего водопроницаемое основание криволиней-

ного водоупора, характеризуемого постоянством скорости обтекания.

Решение краевой задачи (1), которое основано на применении принципа симметрии Римана – Шварца и первого варианта годографа скорости, полученное в [5] – [7], приводит к следующим параметрическим зависимостям:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{Mf(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{Mf(\tau)\exp((0.5 - \tau)\pi i)}{\nu_0\Delta(\tau)},$$

$$f(\tau) = \operatorname{sn}(2K\tau, k)\operatorname{cn}(2K\tau, k)\operatorname{dn}(2K\tau, k),$$

$$\Delta(\tau) = ([1 - \lambda^2\operatorname{sn}^2(2K\tau, k)][1 - n^2\operatorname{sn}^2(2K\tau, k)] \times \\ \times [A^2 + (1 - A^2)\operatorname{sn}^2(2K\tau, k)])^{1/2}.$$

Здесь $M > 0$, $\rho = K'/K$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k , $\lambda = \sqrt{1 - k'^2 B^2}$, $n = \sqrt{1 - k'^2 C^2}$, $A = \operatorname{sn}(2K\tau_a, k')$, $B = \operatorname{sn}(2K\tau_b, k')$, $C = \operatorname{sn}(2K\tau_c, k')$, A , B , C – неизвестные параметры конформного отображения. Областью изменения параметра τ служит прямоугольник $0 < \operatorname{Re} \tau < 0.5$, $0 < \operatorname{Im} \tau < 0.5\rho$.

Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния основных физических параметров модели на форму и размеры подземного контура плотины, а также горизонтального и криволинейных участков водоупора.

Представлены зависимости величин d_1 , l_1 , l_2 и l_3 от всех определяющих параметров модели.

В частности, установлено что, уменьшение скорости обтекания и увеличение действующего на сооружение напора приводят к росту всех размеров плотины, а также величины горизонтального участка водоупора. Обращает на себя внимание

тенденция к росту ширины плотины l_1 при увеличении фильтрационного расхода Q и уменьшении мощности пласта T , а также к росту глубины d_1 , наоборот, при уменьшении параметра Q и увеличении T . Наряду с параметром H мощность пласта также сильно влияет на глубину d_1 .

Отмечаются предельные случаи течения, исследованные ранее в работах [1], [5].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочина И. Н., Полубаринова-Кочина П. Я. *О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений* // ПММ. – 1952. – Т. 16. – С. 57-66.
2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
3. *Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967)*. – М.: Наука, 1969. – 545 с.
4. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения* // Матем. анализ. – 1980. – Т. 18. – С. 67-124.
5. Береславский Э. Н., Александрова Л. А. *Построение контура постоянной скорости основания плотины при наличии криволинейного водоупора* // Вестник гражданских инженеров. – 2008. – № 3 (16). – С. 106-109.
6. Береславский Э. Н., Александрова Л. А. *Моделирование основания гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости при наличии криволинейного водоупора* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 3. – С. 73-79.

7. Береславский Э. Н., Александрова Л. А. *Моделирование контура обтекания постоянной скорости основания гидротехнического сооружения при наличии водопора сложной конфигурации* // Вестник гражданских инженеров. – 2010. – № 2 (23). – С. 189-193.

И. В. Анисимова, Р. Р. Гиниятуллина, В. Н. Игнатъев
НИУ КГТУ-КАИ, ginka@bk.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

В работе предлагаются эффективные численные методы вычисления значений коэффициентов переноса в газовой среде, основанные на компьютерных методах вычисления квадратур с быстроосциллирующими подынтегральными функциями и использовании двумерных сплайн-функций для вычисления значений двукратных несобственных интегралов.

Следует отметить, что в механике сплошной среды используются полуэмпирические уравнения, к которым относятся, например, уравнения Навье – Стокса, тепломассообмена и т. д. Коэффициенты переноса в них определяют, как правило, экспериментально. Авторы предлагают вычислительные технологии определения коэффициентов переноса, основанные на кинетическом уравнении Больцмана [1], [2]. Это позволяет обоснованно использовать аппарат определения коэффициентов переноса. Создан комплекс программ, основанных на численных методах их вычисления.