Д. А. Абанина

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
Южный федеральный университет, abanina@math.rsu.ru

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ И ДЕЛИТЕЛИ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть H — некоторое топологическое векторное пространство целых функций. Функция μ из H называется мультипликатором пространства H, если $\mu \cdot H \subset H$. Если, кроме того, оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в H, то говорят, что мультипликатор μ непрерывен. Далее, делителем пространства H называется такой его нетривиальный мультипликатор μ, для которого справедлива теорема деления: из того, что $f \in H$ и f/μ — целая функция, вытекает, что $f/\mu \in H$.

В своей классической работе [1] Л. Эренпрайс охарактеризовал все делители алгебры целых функций f, рост которых на бесконечности ограничен весом $\exp\{n[\ln(1+|z|)+|\operatorname{Im} z|]\}$ при некотором $n = n(f) \in \mathbb{N}$. В [2] данный результат был распространен на случай алгебры целых функций, задаваемой весами $\exp\{n[\omega(|z|)+|\operatorname{Im} z|]\}$, где ω — некоторая весовая функция. Наконец, в [3] рассматривались пространства целых функций, которые растут на бесконечности не быстрее, чем $\exp[q_n\omega(|z|)+n|\operatorname{Im} z|]$, где $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, которая, монотонно возрастая, стремится к 1 (или любому другому положительному числу). Во всех перечисленных случаях было установлено также, что справедливость для μ теоремы деления эквивалентна замкнутости образа оператора умножения Λ_μ. Это позволяет получить в качестве приложения критерий разрешимости уравнений свертки в сопряженном пространстве H'.

Настоящая работа посвящена описанию мультипликаторов и делителей следующего пространства целых функций:

$$H_{(\omega)} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\left[q_n \omega(|z|) + s_n |\operatorname{Im} z|\right]} < \infty \right\},$$

где $0 < q_n \uparrow 1$, $0 < s_n \uparrow a$, a — фиксированное число. Здесь ω — весовая функция, т. е. непрерывная неубывающая функция, действующая из $[0, \infty)$ в $[0, \infty)$ и удовлетворяющая определенным условиям.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Множество всех непрерывных мультипликаторов пространства $H_{(\omega)}$ совпадает с*

$$M_{(\omega)} := \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp\left[\varepsilon \omega(|z|) + \varepsilon |\operatorname{Im} z|\right]} < \infty \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть μ — произвольный нетривиальный мультипликатор пространства $H_{(\omega)}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) μ *— делитель пространства* $H_{(\omega)}$;

(ii) *образ оператора умножения* $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ *замкнут в* $H_{(\omega)}$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \ \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geqslant r_0 \ \ \exists w \in \mathbb{C}$:

$$|w - x| \leqslant \delta \omega(|x|) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geqslant e^{-\varepsilon \omega(|w|)};$$

(iv) $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \ \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geqslant r_0 \ \ \exists t \in \mathbb{R}$ *с* $|t| > |x|$:

$$|t - x| \leqslant \delta \omega(|x|) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geqslant \exp[-\varepsilon \omega(|t|)];$$

(v) $\forall\varepsilon > 0$ $\forall\delta > 0$ $\exists r_0 > 0$: *для каждой точки* $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ *с* $|x| \geqslant r_0$, $|y| \leqslant \delta|x|$ *найдется окружность* C_z *с радиусом* $R_z \leqslant \delta\omega(|x|) + \delta|y|$, *содержащая точку* z *внутри себя, для всех точек* ζ *которой выполняется неравенство*

$$|\mu(\zeta)| \geqslant \exp[-\varepsilon\omega(|x|) - \varepsilon|y|]\,.$$

В качестве приложения теоремы 2 установлен критерий разрешимости уравнений свертки и, как частный случай, дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале $(-a, a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehrenpreis L. *Solution of some problems of division* // Amer. J. Math. - 1960. - V. 82. - P. 522-588.

2. Meise R., Taylor B. A., Vogt D. *Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions* // Indiana Univ. Math. J. - 1987. - V. 36. - No 4. - P. 729-756.

3. Абанин А. В., Абанина Д. А. *Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций* // Владикавк. матем. журн. - 2010. - Т. 12. - Вып. 3. - С. 3-21.