19. Ахметов А.А., Мухарлямов Р.Г. *Моделирование многопродуктовых производственных объектов с программными связями* // Инновации и высокие технологии XXI века: Материалы Всеросс. научн.-практ. конф. (28 – 30 апреля 2009 г., г. Нижнекамск): в 2 т. Т. 1. / под ред. В.И. Елизарова, М.А. Закирова. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. – С. 143-147.

К.Б. Сабитов

Институт прикладных исследований Академии наук РБ (Стерлитамак), Sabitov_fmf@mail.ru

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ И ПРОБЛЕМА ФЕРМА

Введение

В прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l,\ 0 < t < T_0\}$, где l, T_0 — заданные положительные числа, $p \in \mathbb{N}$, рассмотрим уравнение

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = 0. \tag{1}$$

Задача Дирихле. *Найти в D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{D}) \cap C^{2p}(D); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0; \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T_0} = \psi_k(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $k = \overline{0, p-1}$, φ_k и ψ_k — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям (4) *в точках $x = 0$ и $x = l$.*

Уравнение (1) при $p = 1$ представляет собой известное уравнение колебаний струны, задача Дирихле для которого изучалась во многих работах [1 – 12]. Более детальный обзор публикаций, посвященных данной тематике, можно найти в статье В.И. Арнольда [10] и монографии Ю.М. Березанского [11, гл. IV]. Из указанных работ следует, что если отношение сторон T_0/l прямоугольника D, в котором ищется решение задачи Дирихле для уравнения струны, является рациональным числом, то однородная задача Дирихле имеет нетривиальные решения. При построении решения неоднородной задачи Дирихле методом разделения переменных, т. е. с помощью ряда Фурье, возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость такого ряда. Если отношение сторон T_0/l является иррациональным числом с ограниченными элементами или алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$, то при достаточно гладких граничных функциях удается доказать сходимость построенного ряда.

В данной работе показано, что иррациональность отношения T_0/l является необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) при любом $p \in \mathbb{N}$. При $p = 1, 2, 3$ решение задачи Дирихле построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Для таких p найдены минимальные достаточные условия гладкости относительно заданных функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, которые обеспечивают принадлежность решения задачи (3) – (6) классу (2).

В общем случае задача (2) – (6) сводится к задаче Дирихле для неоднородного уравнения $Lu = f(x,t)$ с однородными граничными условиями. На основании теории двойных рядов Фурье при некоторых условиях относительно функции $f(x,t)$ и числа T_0/l доказаны существование и единственность решения в классе (2).

Отметим, что единственность решения задачи (2) – (6), в отличие от других работ при $p = 1$, доказывается только на основании свойства полноты построенной системы собственных функций соответствующей спектральной задачи. Ранее такой подход применялся в работах [13, 14] при доказательстве единственности решения смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка.

Далее, для трехмерного аналога уравнения (1), т.е. для уравнения вида

$$Lu = \frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial y^{2p}} = f(x,y,t), \qquad (7)$$

в прямоугольном параллелепипеде $Q = \{(x,y,t)|\ (x,y) \in D,\ t \in (0,T)\}$, $D = \{(x,y)|\ 0 < x < l,\ 0 < y < q\}$, где l, q, T — заданные положительные числа, $f(x,y,t)$ — заданная в Q функция, $p \in \mathbb{N}$, исследуется следующая

Задача Дирихле. *Найти в Q функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{Q}) \cap C^{2p}(Q); \qquad (8)$$

$$Lu(x,y,t) \equiv 0, \quad (x,y,t) \in Q; \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=l}=\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=q}=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T}=0,\quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{11}$$

где $k=\overline{0,p-1}$.

Здесь установлен следующий результат. Если существует решение задачи (8) – (11), то оно единственно только тогда, когда уравнение

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p}+\left(\frac{n}{q}\right)^{2p}=\left(\frac{k}{T}\right)^{2p},\quad m,n,k\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

не разрешимо во множестве натуральных чисел.

Если $l=q=T$, т. е. Q является кубом, то (12) переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p}+n^{2p}=k^{2p}. \tag{13}$$

Если $q=l\neq T$, $l/T\in\mathbb{Q}$ или $q=T\neq l$, $T/l\in\mathbb{Q}$, то уравнение (12) также сводится к уравнению типа (13). Следовательно, в этих случаях в силу полученного результата единственность решения задачи Дирихле для уравнения (7) при любом натуральном p равносильна великой проблеме Ферма.

§1. Задача Дирихле для двумерных уравнений с частными производными высоких порядков

1.1. Пусть $p=1$. Для решения задачи (2) – (6) при $p=1$ применим метод спектральных разложений. Разделив переменные $u(x,t)=X(x)T(t)$ в уравнении (1), получим

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{14}$$

$$X(0)=X(l)=0, \tag{15}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad 0 < t < T_0, \tag{16}$$

где λ – постоянная. Как известно, решение спектральной задачи (14) и (15) имеет вид

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_m x, \quad \lambda_m = \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 = \mu_m^2, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

При $\lambda = \lambda_m$ общее решение дифференциального уравнения (16) определяется по формуле

$$T_m(t) = a_m \cos \mu_m t + b_m \sin \mu_m t, \tag{18}$$

где a_m и b_m — произвольные постоянные.

Далее докажем единственность решения задачи (2) – (6) при $p = 1$. Пусть $u(x,t)$ — решение этой задачи. Рассмотрим функции

$$u_m(t) = \int\limits_0^l u(x,t) X_m(x)dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

На основании (19) введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$u_{m,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t) X_m(x)dx, \tag{20}$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно малое число. Продифференцировав (20) два раза по $t \in (0, T_0)$ и с учетом уравнения (1) при $p = 1$, получим

$$u''_{m,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t) X_m(x)dx.$$

Проинтегририровав здесь по частям два раза и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (4) и (15), получим

$$u''_m(t) + \lambda_m u_m(t) = u''_m(t) + \mu_m^2 u_m(t) = 0. \tag{21}$$

Дифференциальное уравнение (21) совпадает с уравнением (16) при $\lambda = \lambda_m$, поэтому $u_m(t) \equiv T_m(t)$, т. е. функции $u_m(t)$ определяются по формуле (18):

$$u_m(t) = a_m \cos(\mu_m t) + b_m \sin(\mu_m t). \tag{22}$$

Для нахождения неизвестных постоянных a_m и b_m воспользуемся граничными условиями (5), (6) и формулой (19):

$$u_m(0) = \int_0^l u(x,0)X_m(x)dx = \int_0^l \varphi_0(x)X_m(x)dx = \varphi_{0m}, \tag{23}$$

$$u_m(T_0) = \int_0^l u(x,T_0)X_m(x)dx = \int_0^l \psi_0(x)X_m(x)dx = \psi_{0m}. \tag{24}$$

Удовлетворив функции (22) граничным условиям (23) и (24), найдем

$$a_m = \varphi_{0m}, \quad b_m = (\psi_{0m} - \varphi_{0m}\cos(\mu_n T_0))/\sin(\mu_m T_0), \tag{25}$$

когда при всех $m \in \mathbb{N}$

$$\sin(\mu_m T_0) = \sin(\pi m \alpha) \neq 0, \quad \alpha = T_0/l. \tag{26}$$

Последнее неравенство означает, что $\alpha\pi m \neq \pi n$ или $\alpha \neq n/m$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. отношение сторон T_0/l прямоугольника D является иррациональным числом.

Пусть теперь $\varphi_0(x) = \psi_0(x) \equiv 0$ и выполнено условие (26) при всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда в силу равенств (23) и (24) $\varphi_{0m} = \psi_{0m} \equiv 0$, поэтому из (25) при условии (26) следует, что $a_m = b_m \equiv 0$. Следовательно, в силу (22) и (19) при любом $t \in [0, T_0]$

$$\int_0^l u(x,t)X_m(x)dx = 0. \tag{27}$$

Отсюда в силу полноты системы (17) в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [0, T_0]$. В силу (2) функция $u(x, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому функция $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть теперь нарушено условие (26), т. е. α является рациональным числом: $\alpha = p/q$, где p и q — взаимно простые натуральные числа. Тогда $\sin(\alpha\pi m) = \sin(pm\pi/q) = 0 \Leftrightarrow m = qn$, $n \in \mathbb{N}$, и однородная задача (2) – (6) (где $\varphi_0(x) = \psi_0(x) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения

$$u_{qn}(x, t) = \sin\frac{\pi qnx}{l} \sin\frac{\pi qnt}{l}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{28}$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (6) *при* $p = 1$, *то оно единственно только тогда, когда* $\sin(\alpha\pi m) \neq 0$ *при всех* $m \in \mathbb{N}$, *т. е. когда отношение сторон* $T_0/l = \alpha$ *прямоугольника* D *является иррациональным числом.*

Перейдем к обоснованию существования решения задачи (2) – (6). Пусть при всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено условие (26). Тогда решение задачи Дирихле на основании частных решений (17), (22) и (25) можно определить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) \sin(\mu_m x), \tag{29}$$

где

$$u_m(t) = \varphi_{0m} \cos(\mu_m t) + \frac{\psi_{0m} - \varphi_{0m}\cos(\alpha\pi m)}{\sin(\alpha\pi m)} \sin(\mu_m t). \tag{30}$$

Для обоснования сходимости ряда (29) надо получить необходимые оценки коэффициентов $u_m(t)$ для достаточно больших

m при любом фиксированном $t \in [0, T_0]$, которые существенным образом зависят от $\sin(\alpha\pi m)$. Отметим, что существуют последовательности натуральных чисел n_m, такие, что $\sin(\alpha\pi n_m) \to 0$ при $m \to +\infty$. Действительно, как известно из теории цепных дробей [15, §8], иррациональное число α можно единственным образом разложить в бесконечную цепную дробь $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, при этом целое число a_0 и натуральные числа $a_1, a_2, \ldots$ называются элементами числа α. Если теперь множество элементов a_0, a_1, a_2, $\ldots$ неограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество чисел p, $q \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\left|\alpha - p/q\right| < \varepsilon/q^2; \tag{31}$$

если же множество a_0, a_1, a_2, $\ldots$ ограничено, то существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $p, q \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\alpha - p/q\right| \geqslant \varepsilon_0/q^2. \tag{32}$$

Пусть α — такое иррациональное число, то для него выполняется оценка (31), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность p_m/q_m, где p_m и q_m — взаимно простые натуральные числа, такая, что

$$\left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{\varepsilon}{q_m^2}. \tag{33}$$

Тогда на основании (33) имеем

$$|\sin(\alpha\pi q_m)| = |\sin(\alpha\pi q_m - p_m\pi)| =$$
$$= \left|\sin\left[\pi q_m\left(\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right)\right]\right| \leqslant \pi q_m\left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{\pi\varepsilon}{q_m}.$$

Отсюда следует, что для таких $\alpha > 0$ выражение $\sin(\alpha\pi m)$, которое является знаменателем дроби в правой части равенства (30), может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому для таких иррациональных чисел α решение задачи Дирихле в виде суммы ряда (29) может не существовать. Теперь естественно возникает вопрос: какие из иррациональных чисел в разложении в цепную дробь имеют ограниченные элементы?

В силу теоремы Лиувилля [15, с. 60] для всякого алгебраического числа α[1] степени $n \geqslant 2$ существует положительное число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при любых целых p, q $(q > 0)$ справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\varepsilon_0}{q^n}.$$

Из теории чисел также известно (см. теорему Рота [16, с. 268]), что для любого алгебраического числа α степени $n \geqslant 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta > 0$, такое, что при любых целых p, q $(q > 0)$ будет иметь место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\delta}{q^{2+\varepsilon}}. \tag{34}$$

Для алгебраических чисел степени, большей чем 2, этот результат значительно улучшает теорему Лиувилля. Однако при $n = 2$ теорема Лиувилля дает более точный результат.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > 0$ — такое, что множество его элементов ограничено. Тогда существует число $C_0 > 0$, такое, что при всех $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\sin(\alpha\pi m)| > \frac{C_0}{m}. \tag{35}$$

---

[1] Число α называется алгебраическим числом степени n, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами только степени n

Доказательство. Для всякого $m \in \mathbb{N}$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{2m}. \tag{36}$$

Для этого достаточно положить

$$n = \begin{cases} [\alpha m], & \text{если} \quad \{\alpha m\} < 1/2, \\ [\alpha m] + 1, & \text{если} \quad \{\alpha m\} > 1/2, \end{cases}$$

где $[\alpha m]$ и $\{\alpha m\}$ — целая и дробная части иррационального числа αm. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — такое, что выполнено неравенство (36). Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{37}$$

и оценки (32) будем иметь

$$|\sin(\alpha\pi m)| = \left|\sin\left[\pi m\left(\alpha - \frac{n}{m}\right)\right]\right| > 2m\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| \geqslant \frac{C_0}{m}.$$

Тем самым справедливость оценки (35) доказана.

Лемма 2. *Если $\alpha > 0$ является алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$, то существует число $C_1 > 0$, такое, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\sin(\alpha\pi m)| \geqslant \frac{C_1}{m}, \quad \textit{когда} \quad n = 2, \tag{38}$$

$$|\sin(\alpha\pi m)| \geqslant \frac{C_1}{m^{1+\varepsilon}}, \quad \textit{когда} \quad n \geqslant 2, \quad \varepsilon > 0. \tag{39}$$

Доказательство. В случае $n = 2$ множество элементов числа α ограничено, поэтому из леммы 1 на основании (35) следует справедливость оценки (38). Когда $n \geqslant 2$, рассуждая аналогично доказательству леммы 1, на основании неравенств (36), (37) и (34) получим оценку (39).

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 0$ является алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$. Тогда при любом $t \in [0, T_0]$ справедливы оценки*

$$|u_m(t)| \leqslant \begin{cases} C_2 m(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если} \quad n = 2, \\ C_2 m^{1+\varepsilon}(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если} \quad n > 2; \end{cases}$$

$$|u'_m(t)| \leqslant \begin{cases} C_3 m^2(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если} \quad n = 2, \\ C_3 m^{2+\varepsilon}(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если} \quad n > 2; \end{cases}$$

$$|u''_m(t)| \leqslant \begin{cases} C_4 m^3(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если} \quad n = 2, \\ C_4 m^{3+\varepsilon}(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|), & \text{если} \quad n > 2, \end{cases}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство следует из формулы (30) на основании оценок (38) и (39).

Формально из (29) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_t(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u'_m(t) X_m(x), \quad u_x(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) X'_m(x), \tag{40}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u''_m(t) X_m(x), \quad u_{xx}(x,t) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m^2 u_m(t) X_m(x). \tag{41}$$

Ряды (29), (40) и (41) при любых $(x,t) \in \overline{D}$ на основании леммы 3 мажорируются рядом

$$C_5 \sum_{m=1}^{+\infty} m^{3+\varepsilon}(|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}|). \tag{42}$$

Лемма 4. *Если функции* $\varphi_0(x), \psi_0(x) \in C^{4+d}[0,l]$, $\varphi_0^{(j)}(0) = \varphi_0^{(j)}(l) = 0$, $\psi_0^{(j)}(0) = \psi_0^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2$, $\varepsilon < d < 1$, *то справедливы оценки*

$$|\varphi_{0m}| \leqslant \frac{C_6}{m^{4+d}}, \quad |\psi_{0m}| \leqslant \frac{C_6}{m^{4+d}}. \tag{43}$$

Доказательство. В интегралах формул (23) и (24), проинтегрировав по частям четыре раза и применив теорему о скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем d [17, с. 80], получим оценки (43). Тогда в силу леммы 4 ряд (42) оценивается сходящимся числовым рядом, поэтому на основании признака Вейерштрасса ряды (29), (40) и (41) сходятся равномерно на замкнутой области $\overline{D}$. Следовательно, функция $u(x,t)$, определяемая рядом (29), принадлежит классу $C^2(\overline{D})$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2. *Если число* $\alpha > 0$ *является алгебраическим числом степени* $n \geqslant 2$ *и функции* $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 4, то существует единственное решение задачи* (2) – (6) *при* $p = 1$, *и оно определяется рядом* (29).

1.2. Пусть теперь $p = 2$. Аналогично пункту 1.1, разделив переменные в уравнении (1), получим

$$X^{(IV)}(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{44}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \quad X(l) = X''(l) = 0, \tag{45}$$

$$T^{(IV)}(t) + \lambda T(t) = 0, \quad 0 < t < T_0. \tag{46}$$

Для уравнения (44) составим характеристическое уравнение

$$k^4 + \lambda = 0. \tag{47}$$

Пусть $\lambda = -d^4$, $d > 0$. Тогда уравнение (47) имеет решения: $k_1 = d$, $k_2 = -d$, $k_3 = \mathrm{i}d$, $k_4 = -\mathrm{i}d$, $\mathrm{i}^2 = -1$. Следовательно, общее решение уравнения (44) определяется по формуле

$$X(x) = \alpha_1 e^{dx} + \alpha_2 e^{-dx} + \alpha_3 \cos(dx) + \alpha_4 \sin(dx), \qquad (48)$$

где α_i, $i = \overline{1,4}$, — произвольные постоянные. Удовлетворяя функцию (48) граничным условиям (45), находим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 \sin(ld) = 0.$$

Отсюда при условии $\alpha_4 \neq 0$ получаем, что

$$\sin(ld) = 0 \Leftrightarrow d_m = \mu_m = \frac{\pi m}{l}, \ m \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m x}{l} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_m x, \\ \lambda_m &= -\mu_m^4 = -\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4. \end{aligned} \qquad (49)$$

Теперь пусть $\lambda = 4d^4 > 0$, $d > 0$. Тогда уравнение (47) имеет решения: $k_1 = d - \mathrm{i}d$, $k_2 = -d + \mathrm{i}d$, $k_3 = d + \mathrm{i}d$, $k_4 = -d + \mathrm{i}d$. В этом случае общее решение уравнения (44) определяется по формуле

$$X(x) = e^{dx}[\alpha_1 \cos(dx) + \alpha_2 \sin(dx)] + \\ + e^{-dx}[\alpha_3 \cos(dx) + \alpha_4 \sin(dx)]. \qquad (50)$$

Удовлетворяя для функции (50) граничным условиям (45), получим линейную однородную систему относительно неизвестных α_i, $i = \overline{1,4}$, в которой определитель при всех $d > 0$ отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное нулевое решение $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,4}$.

При $d = 0$ спектральная задача (44) и (45) имеет также только нулевое решение.

Таким образом, система собственных функций спектральной задачи (44) и (45) определяется по формуле (49).

При $\lambda = \lambda_m = -d_m^4$ дифференциальное уравнение (45) имеет общее решение

$$T_m(t) = \alpha_{1m} e^{d_m t} + \alpha_{2m} e^{-d_m t} + \alpha_{3m} \cos(d_m t) + \alpha_{4m} \sin(d_m t), \quad (51)$$

где α_{im}, $i = \overline{1,4}$, — произвольные постоянные.

По аналогии с пунктом 1.1 докажем единственность решения задачи (2) - (6) при $p = 2$. Введем функцию (19) и, рассуждая аналогично, получим, что функция (19) в этом случае удовлетворяет дифференциальному уравнению 4-го порядка

$$u_m^{(IV)}(t) - d_m^4 u_m(t) = 0, \quad 0 < t < T_0. \quad (52)$$

Дифференциальное уравнение (52) при $\lambda = \lambda_m = -d_m^4$ совпадает с уравнением (45), поэтому общее решение уравнения (52) задается по формуле (51). Для определения неизвестных постоянных α_{im}, $i = \overline{1,4}$, воспользуемся условиями (23), (24) и

$$u_m''(0) = \int_0^l u_{tt}(x,0) X_m(x) dx = \int_0^l \varphi_1(x) X_m(x) dx = \varphi_{1m}, \quad (53)$$

$$u_m''(T_0) = \int_0^l u_{tt}(x,T_0) X_m(x) dx =$$

$$= \int_0^l \psi_1(x) X_m(x) dx = \psi_{1m}. \quad (54)$$

Потребовав, чтобы функция (51) удовлетворяла граничным условиям (23), (24), (53) и (54), получим систему

$$\begin{cases} \alpha_{1m} + \alpha_{2m} + \alpha_{3m} = \varphi_{0m}, \\ \\ \alpha_{1m} + \alpha_{2m} - \alpha_{3m} = \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}, \\ \\ \alpha_{1m}e^{d_mT_0} + \alpha_{2m}e^{-d_mT_0} + \alpha_{3m}\cos(d_mT_0) + \\ +\alpha_{4m}\sin(d_mT_0) = \psi_{0m}, \\ \\ \alpha_{1m}e^{d_mT_0} + \alpha_{2m}e^{-d_mT_0} - \alpha_{3m}\cos(d_mT_0) - \\ -\alpha_{4m}\sin(d_mT_0) = \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}. \end{cases} \tag{55}$$

Из (55) находим

$$\alpha_{3m} = \frac{1}{2}\Big(\varphi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\Big), \tag{56}$$

$$\alpha_{4m} = \frac{1}{2\sin(d_mT_0)}\Big[\Big(\psi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}\Big) - \\ - \cos d_mT_0\Big(\varphi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\Big)\Big], \tag{57}$$

$$\alpha_{1m} = \frac{1}{4\,\mathrm{sh}(d_mT_0)}\Big[\Big(\psi_{0m} + \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}\Big) - \\ - e^{-d_mT_0}\Big(\varphi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\Big)\Big], \tag{58}$$

$$\alpha_{2m} = \frac{1}{4\,\mathrm{sh}(d_mT_0)}\Big[e^{d_mT_0}\Big(\varphi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\Big) - \\ - \Big(\psi_{0m} + \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}\Big)\Big], \tag{59}$$

причем для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено условие (26).

Пусть теперь $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = \psi_0(x) = \psi_1(x) \equiv 0$. Тогда в силу равенств (23), (24), (53), (54) имеем $\varphi_{0m} = \varphi_{1m} = \psi_{0m} = \psi_{1m} \equiv 0$, а из равенств (56) – (59) при условии (26) следует, что все $\alpha_{im} \equiv 0$, $i = \overline{1,4}$. Следовательно, из формул (51) и (19) при любом $t \in [0, T_0]$ получаем справедливость равенства (27), из которого в силу полноты системы (49) в $L_2[0,l]$ вытекает, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть нарушено условие (26), т. е. число α является рациональным. Тогда однородная задача (2) – (6) (где $\varphi_k(x) = \psi_k(x) \equiv 0$, $k = 0, 1$) имеет нетривиальное решение (28).

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Если существует решение задачи* (2) – (6) *при* $p = 2$, *то оно единственно только тогда, когда отношение сторон прямоугольника D является иррациональным числом.*

Решение задачи (2) – (6) будем искать в виде суммы ряда (29), где коэффициенты $u_m(t)$ определяются по формулам

$$u_m(t) = \frac{e^{d_m t}}{4\,\mathrm{sh}(d_m T_0)}\left[\left(\psi_{0m} + \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}\right) - e^{-d_m T_0}\left(\varphi_{0m} + \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\right)\right] +$$
$$+ \frac{e^{-d_m t}}{4\,\mathrm{sh}(d_m T_0)}\left[e^{d_m T_0}\left(\varphi_{0m} + \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\right) - \left(\psi_{0m} + \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\sin(d_m t)}{2\sin(d_m T_0)}\left[\left(\psi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\psi_{1m}\right) - \cos(d_m T_0)\left(\varphi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\cos d_m t}{2}\left(\varphi_{0m} - \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}\right). \quad (60)$$

Лемма 5. *Пусть $\alpha > 0$ является алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$. Тогда при любом $t \in [0, T_0]$ справедливы оценки*

$$|u_m^{(i)}(t)| \leqslant M_i m^{i+1+\varepsilon}\left[|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}| + \frac{1}{m^2}\left(|\varphi_{1m}| + |\psi_{1m}|\right)\right], \quad (61)$$

где M_i, $i = \overline{0,4}$, — положительные постоянные, которые не зависят от m и функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, $k = 0, 1$.

Справедливость оценки (61) следует из формулы (60) и леммы 3.

Лемма 6. *Если функции* $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x) \in C^{6+d}[0,l]$, $\varphi_0^{(j)}(0) = \varphi_0^{(j)}(l) = 0$, $\psi_0^{(j)}(0) = \psi_0^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4$; $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x) \in C^{4+d}[0,l]$, $\varphi_1^{(j)}(0) = \varphi_1^{(j)}(l) = \psi_1^{(j)}(0) = \psi_1^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2$, $\varepsilon < d < 1$, *то имеют место оценки*

$$|\varphi_{0m}| \leqslant \frac{M_5}{m^{6+d}}, \quad |\psi_{0m}| \leqslant \frac{M_5}{m^{6+d}}, \quad |\varphi_{1m}| \leqslant \frac{M_6}{m^{4+d}}, \quad |\psi_{1m}| \leqslant \frac{M_6}{m^{4+d}},$$

здесь M_5 *и* M_6 *— положительные постоянные.*

В силу леммы 6 ряд (29), коэффициенты которого определяются формулой (60), сходится равномерно на $\overline{D}$ и там допускает почленное дифференцирование по переменным x и t четыре раза.

Следовательно, нами доказана

Теорема 4. *Если* $\alpha > 0$ *является алгебраическим числом степени* $n \geqslant 2$ *и функции* $\varphi_k(x)$ *и* $\psi_k(x)$, $k = 0,1$, *удовлетворяют условиям леммы 6, то существует единственное решение задачи* (2) - (6) *при* $p = 2$, *и это решение определяется рядом* (29), *у которого коэффициенты находятся по формуле* (60).

1.3. Пусть $p = 3$. Аналогично пунктам 1.1 и 1.2, разделив переменные в уравнении (1) при $p = 3$, получим

$$X^{(VI)}(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{62}$$

$$X(0) = X''(0) = X^{(IV)}(0) = 0, \quad X(l) = X''(l) = X^{(IV)}(l) = 0, \tag{63}$$

$$T^{(VI)}(t) + \lambda T(t) = 0, \quad 0 < t < T_0. \tag{64}$$

Характеристическое уравнение для (62) имеет вид

$$k^6 + \lambda = 0. \tag{65}$$

Если в (65) $\lambda = d^6$, $d > 0$, то данное уравнение имеет следующие корни: $k_1 = \mathrm{i}d$, $k_2 = -\mathrm{i}d$, $k_3 = d(\sqrt{3}/2 + \mathrm{i}/2)$, $k_4 = -d(\sqrt{3}/2 + \mathrm{i}/2)$, $k_5 = d(\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2)$, $k_6 = -d(\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2)$. Тогда общее решение уравнения (62) определяется по формуле

$$X(x) = \alpha_1 \cos(dx) + \alpha_2 \sin(dx) + e^{\frac{d\sqrt{3}}{2}x}\left(\alpha_3 \cos\frac{dx}{2} + \alpha_4 \sin\frac{dx}{2}\right) + \\ + e^{-\frac{d\sqrt{3}}{2}x}\left(\alpha_5 \cos\frac{dx}{2} + \alpha_6 \sin\frac{dx}{2}\right), \quad (66)$$

где α_i, $i = \overline{1,6}$, — произвольные постоянные.

Теперь, требуя для функции (66) выполнения граничных условий (63) в точке $x = 0$, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0, \\ -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_4 + \frac{1}{2}\alpha_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_6 = 0, \\ \alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_6 = 0. \end{cases} \quad (67)$$

Из системы (67) находим

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_5 = -\alpha_3, \quad \alpha_4 = \alpha_6. \quad (68)$$

С учетом (68) функция (66) принимает вид

$$X(x) = \alpha_2 \sin(dx) + 2\alpha_3 \cos\frac{dx}{2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{d\sqrt{3}}{2}x\right) + \\ + 2\alpha_4 \sin\frac{dx}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{d\sqrt{3}}{2}x\right). \quad (69)$$

Для определения α_2, α_3 и α_4 потребуем для функции (69) удовлетворения граничным условиям (63) в точке $x = l$, что приводит к системе

$$\begin{cases} \alpha_2 \sin dl + 2\alpha_3 \cos\frac{dl}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l + 2\alpha_4 \sin\frac{dl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l = 0, \\ -\alpha_2 \sin dl + \alpha_3\Big(\cos\frac{dl}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l - \sqrt{3}\sin\frac{dl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l\Big) + \\ +\alpha_4\Big(\sin\frac{dl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l + \sqrt{3}\cos\frac{dl}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l\Big) = 0, \\ \alpha_2 \sin dl - \alpha_3\Big(\cos\frac{dl}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l + \sqrt{3}\sin\frac{dl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l\Big) - \\ -\alpha_4\Big(\sin\frac{dl}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l - \sqrt{3}\cos\frac{dl}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{d\sqrt{3}}{2}l\Big) = 0. \end{cases} \quad (70)$$

Решив (70), получим

$$\alpha_2 \sin(dl) = 0, \tag{71}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0. \tag{72}$$

Таким образом, полагая $\alpha_2 \neq 0$, из равенства (71) находим собственные значения задачи (62) и (63): $d_m = \pi m/l$, $m \in \mathbb{N}$, а из формулы (66) в силу (72) определяем соответствующие собственные функции

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(d_m x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi m}{l} x\right).$$

Пусть теперь в уравнении (65) $\lambda = -d^6$, $d > 0$. В этом случае уравнение (65) имеет корни

$$k_1 = d, \quad k_2 = -d, \quad k_3 = d\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \quad k_4 = -k_3,$$

$$k_5 = \overline{k_3} = d\Big(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \quad k_6 = -k_5 = \overline{k_4}.$$

Тогда общее решение уравнения (62) имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) = \alpha_1 e^{dx} + \alpha_2 e^{-dx} + \\ + e^{dx/2}\Big[\alpha_3 \cos\Big(\frac{d\sqrt{3}}{2}x\Big) + \alpha_4 \sin\Big(\frac{d\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big] + \\ + e^{-dx/2}\Big[\alpha_5 \cos\Big(\frac{d\sqrt{3}}{2}x\Big) + \alpha_6 \sin\Big(\frac{d\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{73}$$

Удовлетворив функцию (73) первым трем граничным условиям из (63), получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_6 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_6 = 0. \end{cases} \tag{74}$$

Из системы (74) находим

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \quad \alpha_5 = -\alpha_3, \quad \alpha_4 = \alpha_6. \tag{75}$$

Удовлетворяя функцию (73) с учетом (75) последним трем условиям из (63), будем иметь

$$\begin{cases} 2\alpha_1 \operatorname{sh} dl + 2\alpha_3 \cos\beta l \operatorname{sh}\frac{dl}{2} + 2\alpha_4 \sin\beta l \operatorname{sh}\frac{dl}{2} = 0, \\ 2\alpha_1 \operatorname{sh} dl - \alpha_3\Big(\cos\beta l \operatorname{sh}\frac{dl}{2} + \sqrt{3}\sin\beta l \operatorname{ch}\frac{dl}{2}\Big) - \\ -\alpha_4\Big(\sin\beta l \operatorname{ch}\frac{dl}{2} - \sqrt{3}\cos\beta l \operatorname{sh}\frac{dl}{2}\Big) = 0, \\ 2\alpha_1 \operatorname{sh} dl - \alpha_3\Big(\cos\beta l \operatorname{sh}\frac{dl}{2} - \sqrt{3}\sin\beta l \operatorname{ch}\frac{dl}{2}\Big) - \\ -\alpha_4\Big(\sin\beta l \operatorname{ch}\frac{dl}{2} + \sqrt{3}\cos\beta l \operatorname{sh}\frac{dl}{2}\Big) = 0, \end{cases} \tag{76}$$

где $\beta = d\sqrt{3}/2$. Поскольку определитель системы (76) при всех $l > 0$ не равен нулю, то отсюда получаем

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0. \tag{77}$$

Поэтому в силу (77), (75) и (73) функция $X(x) \equiv 0$. При $\lambda = 0$ аналогично показывается, что $X(x) \equiv 0$. Таким образом, спектральная задача (62) и (63) при $\lambda \leqslant 0$ имеет только нулевое решение.

При $\lambda = \lambda_m = d_m^6$ уравнение (64) имеет общее решение

$$\begin{aligned} T_m(t) = \alpha_{1m}\cos(d_m t) + \alpha_{2m}\sin(d_m t) + \\ + e^{\beta_m t}\Big(\alpha_{3m}\cos\frac{d_m t}{2} + \alpha_{4m}\sin\frac{d_m t}{2}\Big) + \\ + e^{-\beta_m t}\Big(\alpha_{5m}\cos\frac{d_m t}{2} + \alpha_{6m}\sin\frac{d_m t}{2}\Big), \end{aligned} \tag{78}$$

где α_{im}, $i = \overline{1,6}$, — произвольные постоянные, $\beta_m = d_m\sqrt{3}/2$.

Рассмотрим функцию (19) и, рассуждая аналогично пункту 1.1, получим, что эта функция в этом случае удовлетворяет дифференциальному уравнению шестого порядка

$$u_m^{(VI)}(t) + d_m^6 u_m(t) = 0, \quad 0 < t < T_0. \tag{79}$$

Дифференциальное уравнение (86) при $\lambda = \lambda_m = d_m^6 > 0$ совпадает с уравнением (64). Следовательно, общее решение уравнения (79) определяется по формуле (78).

Для определения неизвестных постоянных α_{im}, $i = \overline{1,6}$, в формуле (78) воспользуемся условиями (23), (24), (53), (54) и

$$u_m^{(IV)}(0) = \int_0^l u_t^{(IV)}(x,0)X_m(x)dx = \int_0^l \varphi_2(x)X_m(x)dx = \varphi_{2m}, \tag{80}$$

$$u_m^{(IV)}(T_0) = \int_0^l u_t^{(IV)}(x,T_0)X_m(x)dx = \int_0^l \psi_2(x)X_m(x)dx = \psi_{2m}. \tag{81}$$

Удовлетворяя функцию (78) граничным условиям (23), (24), (53), (54), (80) и (81), получим систему

$$\alpha_{1m} + \alpha_{3m} + \alpha_{5m} = \varphi_{0m}, \tag{82}$$

$$-\alpha_{1m} + \frac{1}{2}\alpha_{3m} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{4m} + \frac{1}{2}\alpha_{5m} - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{6m} = \frac{1}{d_m^2}\varphi_{1m}, \tag{83}$$

$$\alpha_{1m} - \frac{1}{2}\alpha_{3m} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{4m} - \frac{1}{2}\alpha_{5m} - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{6m} = \frac{1}{d_m^4}\varphi_{2m}, \tag{84}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{1m}\cos(d_m T_0) + \alpha_{2m}\sin(d_m T_0) + \\ + e^{\beta_m T_0}\left(\alpha_{3m}\cos\frac{d_m T_0}{2} + \alpha_{4m}\sin\frac{d_m T_0}{2}\right) + \\ + e^{-\beta_m T_0}\left(\alpha_{5m}\cos\frac{d_m T_0}{2} + \alpha_{6m}\sin\frac{d_m T_0}{2}\right) = \psi_{0m},\end{gathered} \tag{85}$$

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_{1m}\cos(d_mT_0)-\alpha_{2m}\sin(d_mT_0)+\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{\beta_mT_0}\Big(\alpha_{3m}\cos\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{4m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\Big)+\\
&\quad+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\beta_mT_0}\Big(-\alpha_{3m}\sin\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{4m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\Big)+\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{-\beta_mT_0}\Big(\alpha_{5m}\cos\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{6m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\Big)-\\
&-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\beta_mT_0}\Big(-\alpha_{5m}\sin\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{6m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\Big)=\frac{1}{d_m^2}\psi_{1m},
\end{aligned}
\tag{86}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{1m}\cos(d_mT_0)+\alpha_{2m}\sin(d_mT_0)-\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{\beta_mT_0}\Big(\alpha_{3m}\cos\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{4m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\Big)+\\
&\quad+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\beta_mT_0}\Big(-\alpha_{3m}\sin\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{4m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\Big)-\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{-\beta_mT_0}\Big(\alpha_{5m}\cos\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{6m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\Big)-\\
&-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\beta_mT_0}\Big(-\alpha_{5m}\sin\frac{d_mT_0}{2}+\alpha_{6m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\Big)=\frac{1}{d_m^4}\psi_{2m}.
\end{aligned}
\tag{87}
$$

Из первых трех уравнений (82) – (84) найдем

$$\alpha_{1m}=\frac{1}{3}\varphi_{0m}+\frac{1}{3d_m^4}\Big(\varphi_{2m}-\varphi_{1m}d_m^2\Big),\tag{88}$$

$$\alpha_{5m}=-\alpha_{3m}+\frac{2}{3}\varphi_{0m}+\frac{1}{3d_m^4}\Big(\varphi_{1m}d_m^2-\varphi_{2m}\Big),\tag{89}$$

$$\alpha_{6m}=\alpha_{4m}-\frac{1}{\sqrt{3}d_m^4}\Big(\varphi_{1m}d_m^2+\varphi_{2m}\Big).\tag{90}$$

С учетом (88) – (90) оставшиеся уравнения (85) – (87) системы примут вид

$$\alpha_{1m}\cos(d_mT_0)+\alpha_{2m}\sin(d_mT_0)+2\alpha_{3m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{sh}(\beta_mT_0)-$$
$$+2\alpha_{4m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{ch}(\beta_mT_0)=B_{1m},\quad (91)$$

$$-\alpha_{1m}\cos(d_mT_0)-\alpha_{2m}\sin(d_mT_0)+$$
$$+\alpha_{3m}\left[\cos\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{sh}(\beta_mT_0)-\sqrt{3}\sin\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{ch}(\beta_mT_0)\right]+$$
$$+\alpha_{4m}\left[\sin\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{ch}(\beta_mT_0)+\sqrt{3}\cos\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{sh}(\beta_mT_0)\right]=B_{2m},\quad (92)$$

$$\alpha_{1m}\cos(d_mT_0)+\alpha_{2m}\sin(d_mT_0)-$$
$$-\alpha_{3m}\left[\cos\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{sh}(\beta_mT_0)+\sqrt{3}\sin\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{ch}(\beta_mT_0)\right]-$$
$$-\alpha_{4m}\left[\sin\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{ch}(\beta_mT_0)-\sqrt{3}\cos\frac{d_mT_0}{2}\,\mathrm{sh}(\beta_mT_0)\right]=B_{3m},\quad (93)$$

где

$$B_{1m}=\psi_{0m}-e^{-\beta_mT_0}\left(A_{1m}\cos\frac{d_mT_0}{2}-A_{2m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\right),$$

$$B_{2m}=\frac{\psi_{1m}}{d_m^2}-\frac{1}{2}e^{-\beta_mT_0}\left(A_{1m}\cos\frac{d_mT_0}{2}-A_{2m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\right)-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\beta_mT_0}\left(A_{1m}\sin\frac{d_mT_0}{2}+A_{2m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\right),$$

$$B_{3m}=\frac{\psi_{2m}}{d_m^4}+\frac{1}{2}e^{-\beta_mT_0}\left(A_{1m}\cos\frac{d_mT_0}{2}-A_{2m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\right)-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\beta_mT_0}\left(A_{1m}\sin\frac{d_mT_0}{2}+A_{2m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\right),$$
$$A_{1m}=\frac{2}{3}\varphi_{0m}+\frac{1}{3d_m^4}(\varphi_{1m}d_m^2-\varphi_{2m}),$$

$$A_{2m} = \frac{1}{\sqrt{3}d_m^4}(\varphi_{1m}d_m^2 + \varphi_{2m}).$$

При условии, что при всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено условие (26), из системы (91) – (93) однозначным образом находим

$$\alpha_{3m} = \frac{C_{1m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\operatorname{ch}(\beta_mT_0) + C_{2m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\operatorname{sh}(\beta_mT_0)}{\sin^2\frac{d_mT_0}{2} + \operatorname{sh}^2(\beta_mT_0)}, \quad (94)$$

$$\alpha_{4m} = \frac{C_{2m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\operatorname{ch}(\beta_mT_0) - C_{1m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\operatorname{sh}(\beta_mT_0)}{\sin^2\frac{d_mT_0}{2} + \operatorname{sh}^2(\beta_mT_0)}, \quad (95)$$

$$\alpha_{2m} = \frac{1}{\sin(d_mT_0)}\Bigg\{\frac{\psi_{2m} - \psi_{1m}d_m^2}{d_m^4} - \frac{\cos(d_mT_0)}{3d_m^4}\Big(\varphi_{2m} - \varphi_{1m}d_m^2\Big) +$$
$$+ \frac{\varphi_{0m}}{3}\Big(e^{-\beta_mT_0}\cos\frac{d_mT_0}{2} - \cos(d_mT_0)\Big) +$$
$$+ \frac{e^{-\beta_mT_0}}{6d_m^4}\Big[\Big(\varphi_{1m}d_m^2 - \varphi_{2m}\Big)\cos\frac{d_mT_0}{2} -$$
$$- \sqrt{3}\Big(\varphi_{1m}d_m^2 + \varphi_{2m}\Big)\sin\frac{d_mT_0}{2}\Big] +$$
$$+ \alpha_{3m}\cos\frac{d_mT_0}{2}\operatorname{sh}(\beta_mT_0) + \alpha_{4m}\sin\frac{d_mT_0}{2}\operatorname{ch}(\beta_mT_0)\Bigg\}, \quad (96)$$

где

$$C_{1m} = -\frac{d_m^2\psi_{1m} + \psi_{2m}}{2\sqrt{3}d_m^4} + \frac{\varphi_{0m}}{3}\sin\frac{d_mT_0}{2}e^{-\beta_mT_0} +$$
$$+ \frac{1}{6d_m^4}e^{-\beta_mT_0}\Big[\Big(\varphi_{1m}d_m^2 - \varphi_{2m}\Big)\sin\frac{d_mT_0}{2} +$$
$$+ \sqrt{3}\Big(\varphi_{1m}d_m^2 + \varphi_{2m}\Big)\cos\frac{d_mT_0}{2}\Big], \quad (97)$$

$$C_{2m} = \frac{d_m^2\psi_{1m} - \psi_{2m}}{6d_m^4} + \frac{1}{3}\psi_{0m} - \frac{\varphi_{0m}}{3}\cos\frac{d_mT_0}{2}e^{-\beta_mT_0} -$$
$$- \frac{1}{6d_m^4}e^{-\beta_mT_0}\Big[\Big(\varphi_{1m}d_m^2 - \varphi_{2m}\Big)\cos\frac{d_mT_0}{2} -$$
$$- \sqrt{3}\Big(\varphi_{1m}d_m^2 + \varphi_{2m}\Big)\sin\frac{d_mT_0}{2}\Big]. \quad (98)$$

Подставляя (94) и (95) с учетом (97) и (98), из формул (89) и (90) находим α_{5m} и α_{6m}.

Таким образом, при условии (26) все коэффициенты α_{im}, $i = \overline{1,6}$, функции (78) однозначно найдены, и они определяются по формулам (88) – (90), (94) – (98).

Если теперь $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \psi_0(x) = \psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 0$, то из равенств (23), (24), (53), (54), (80) и (81) следует $\varphi_{0m} = \varphi_{1m} = \varphi_{2m} = \psi_{0m} = \psi_{1m} = \psi_{2m} = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда в силу формул (88) – (90), (94) – (98) при условии (26) получим, что $\alpha_{im} \equiv 0$, $i = \overline{1,6}$. В силу этого из формул (78) и (19) при любом $t \in [0, T_0]$ следует справедливость равенства (27), из которого в силу полноты системы (49) в пространстве $L_2[0,l]$ имеем $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Если нарушено условие (26), т.е. отношение $\alpha = T_0/l$ является рациональным числом, что задача (2) – (6) при $\varphi_k(x) = \psi_k(x) \equiv 0$, $k = 0,1,2$, имеет нетривиальное решение (28).

Таким образом, нами доказана

Теорема 5. *Если существует решение задачи* (2) – (6) *при* $p = 3$, *но оно единственно только тогда, когда отношение сторон прямоугольника* D *является иррациональным числом.*

Решение задачи (2) – (6) также ищется в виде суммы ряда (29), в котором коэффициенты $u_m(t)$ определяются по формулам (78), где α_{im} находятся из соотношений (88) – (90) и (94) – (98).

Лемма 7. *Если $\alpha > 0$ является алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$, то при любом $t \in [0, T_0]$ справедливы оценки*

$$|u_m^{(i)}(t)| \leqslant N_i m^{i+1+\varepsilon}\Big[|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}| + \\ + \frac{1}{m^2}(|\varphi_{1m}| + |\psi_{1m}|) + \frac{1}{m^4}(|\varphi_{2m}| + |\psi_{2m}|)\Big], \quad (99)$$

где N_i, $i = \overline{0,6}$, – положительные постоянные, которые, вообще говоря, зависят от l и T_0.

Доказательство. Прежде всего оценим коэффициенты α_{im}:

$$|\alpha_{1m}| \leqslant \widetilde{N}_1\Big[|\varphi_{0m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}|d_m^2 + |\varphi_{2m}|\Big)\Big], \quad (100)$$

$$\sin^2\frac{d_m T_0}{2} + \mathrm{sh}^2(\beta_m T_0) \geqslant \mathrm{sh}^2(\beta_m T_0) \geqslant \widetilde{N}_0 e^{2\beta_m T_0},$$

$$|\alpha_{3m}| \leqslant \widetilde{N}_3 e^{-\beta_m T_0}\Big[e^{-\beta_m T_0}\Big(|\varphi_{0m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}|d_m^2 + |\varphi_{2m}|\Big)\Big) + \\ + |\psi_{0m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\psi_{1m}|d_m^2 + |\psi_{2m}|\Big)\Big], \quad (101)$$

$$|\alpha_{4m}| \leqslant \widetilde{N}_4 e^{-\beta_m T_0}\Big[e^{-\beta_m T_0}\Big(|\varphi_{0m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}|d_m^2 + |\varphi_{2m}|\Big)\Big) + \\ + |\psi_{0m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\psi_{1m}|d_m^2 + |\psi_{2m}|\Big)\Big], \quad (102)$$

$$|\alpha_{5m}| \leqslant |\alpha_{3m}| + |\varphi_{0m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}|d_m^2 + |\varphi_{2m}|\Big), \quad (103)$$

$$|\alpha_{6m}| \leqslant |\alpha_{4m}| + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}|d_m^2 + |\varphi_{2m}|\Big), \quad (104)$$

$$|\alpha_{2m}| \leqslant \widetilde{N}_2 m^{1+\varepsilon}\Big[\Big(|\alpha_{3m}| + |\alpha_{4m}|\Big)e^{\beta_m T_0} + |\varphi_{0m}| + \\ + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}|d_m^2 + |\varphi_{2m}|\Big)\Big] \leqslant \widehat{N}_5 m^{1+\varepsilon}\Big[|\varphi_{0m}| + |\psi_{0m}| + \\ + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{1m}| + |\psi_{1m}|\Big) + \frac{1}{d_m^4}\Big(|\varphi_{2m}| + |\psi_{2m}|\Big)\Big], \quad (105)$$

где $\widetilde{N}_j$ $(j = \overline{0,5})$ — положительные постоянные. Тогда на основании соотношений (100) - (105) из формулы (78) следует справедливость оценок (99).

Лемма 8. Если функции $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x) \in C^{8+d}[0,l]$, $\varphi_0^{(j)}(0) = \varphi_0^{(j)}(l) = \psi_0^{(j)}(0) = \psi_0^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4,6$; $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x) \in C^{6+d}[0,l]$, $\varphi_1^{(j)}(0) = \varphi_1^{(j)}(l) = \psi_1^{(j)}(0) = \psi_1^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4$; $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x) \in C^{4+d}[0,l]$, $\varphi_2^{(j)}(0) = \varphi_2^{(j)}(l) = \psi_2^{(j)}(0) = \psi_2^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2$, $\varepsilon < d < 1$, то справедливы оценки

$$|\varphi_{0m}| \leqslant \frac{N_7}{m^{8+d}}, \quad |\psi_{0m}| \leqslant \frac{N_8}{m^{8+d}}, \quad |\varphi_{1m}| \leqslant \frac{N_9}{m^{6+d}}, \quad |\psi_{1m}| \leqslant \frac{N_{10}}{m^{6+d}},$$

$$|\varphi_{2m}| \leqslant \frac{N_{11}}{m^{4+d}}, \quad |\psi_{2m}| \leqslant \frac{N_{12}}{m^{4+d}},$$

где N_k, $k = \overline{7,12}$, — положительные постоянные.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 4.

В силу леммы 7 и 8 ряды, полученные из ряда (29), где коэффициенты определяются по формуле (78), шестикратным почленным дифференцированием по переменным x и t, при всех $(x,t) \in \overline{D}$ мажорируются сходящимся числовым рядом

$$N_{13} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{1+d-\varepsilon}}, \quad N_{13} = \mathrm{const}.$$

Следовательно, справедлива следующая

Теорема 6. *Если $\alpha > 0$ является алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$ и функции $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, $k = 0,1,2$, удовлетворяют условиям леммы 7, то существует единственное решение задачи* (2) – (6) *при $p = 3$, и это решение определяется рядом* (29), *у которого коэффициенты находятся по формуле* (78).

Замечание 1. Отметим, что если число α является алгебраическим числом степени $n = 2$, т. е. α — квадратичная иррациональность, то в силу оценки (38) в леммах 4, 6 и 8 и соответственно в теоремах 2, 4 и 6 можно принять $\varepsilon = d = 0$.

Замечание 2. Граничные условия (4) на боковых сторонах прямоугольника D только для простоты вычислений взяты нулевыми. В случае ненулевых граничных условий решение задачи Дирихле определяется в виде суммы двух решений типа (2) - (6) (см. [12]).

Отметим, что в работе [10, § 14] доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения струны для всех чисел $\mu = T_0/(T_0 + l)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{n^3}$$

при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и некотором $K = \text{const} > 0$, методом теории отображений.

1.4. Пусть p — любое натуральное число. Из пунктов 1.1 - 1.3 видно, что с ростом p построение решения задачи (2) - (6) технически усложняется. В связи с чем далее рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = f(x, t) \tag{106}$$

с однородными граничными условиями, т. е. положим $\varphi_k(x) = \psi_k(x) \equiv 0$ при всех $k = \overline{0, p-1}$, так как заменой функции u можно добиться для новой функции нулевых граничных условий.

Итак, в этом пункте изучим задачу Дирихле в следующей постановке: найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (2), (106), (4) и

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T_0} = 0, \quad k = \overline{0, p-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{107}$$

Рассмотрим следующие системы функций:

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} x = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\mu_m x), \quad m = 1, 2, \dots ,$$

$$T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin \frac{\pi n}{T_0} t = \sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin(\lambda_n t), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

каждая из них ортонормирована, полна и образует базис соответственно в $L_2[0, l]$ и $L_2[0, T_0]$.

Тогда, как известно, их произведение

$$X_m(x) T_n(t) = \frac{2}{\sqrt{l T_0}} \sin(\mu_m x) \sin(\lambda_n t) \tag{108}$$

образует систему, которая ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2(D)$, $D = (0, l) \times (0, T_0)$.

Решение задачи (2), (4), (106) и (107) будем искать в виде суммы двойного ряда

$$u(x, t) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} u_{mn} X_m(x) T_n(t). \tag{109}$$

Если существует решение $u(x, t)$ задачи (2), (4), (106) и (107), то коэффициенты ряда (109) можно однозначно найти по формуле

$$u_{mn} = \iint\limits_D u(x, t) X_m(x) T_n(t) dx dt. \tag{110}$$

Предположим, что $f(x, t)$ — достаточно гладкая функция, обращающаяся в нуль на сторонах прямоугольника D со своими нужными производными. Тогда эту функцию можно единственным образом разложить в ряд по системе (108)

$$f(x, t) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} f_{mn} X_m(x) T_n(t), \tag{111}$$

где

$$f_{mn} = \iint\limits_D f(x,t) X_m(x) T_n(t) dx dt. \tag{112}$$

Подставив (109) и (111) в уравнение (106), найдем

$$u_{mn} = \frac{(-1)^p f_{mn}}{\lambda_n^{2p} - \mu_m^{2p}} \tag{113}$$

при условии, когда при всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{mn} = \lambda_n^{2p} - \mu_m^{2p} \neq 0. \tag{114}$$

Выражение для Δ_{mn} разложим на множители:

$$\Delta_{mn} = \left(\frac{\pi}{T_0}\right)^{2p} \left[n^{2p} - (\alpha m)^{2p}\right] = \left(\frac{\pi}{T_0}\right)^{2p} \left(n - \alpha m\right) \left[n^p + (\alpha m)^p\right] \times$$
$$\times \left[n^{p-1} + n^{p-2}(\alpha m) + \cdots + n(\alpha m)^{p-2} + (\alpha m)^{p-1}\right]. \tag{115}$$

Из равенства (115) видно, что $\Delta_{mn} = 0$ только тогда, когда $\alpha = n/m$, то есть когда α является рациональным числом. Всегда найдутся натуральные числа m и n, такие, что $\Delta_{mn} = 0$.

Пусть теперь существует решение $u(x,t)$ однородной задачи (2), (4), (106) и (107), где $f(x,t) \equiv 0$ в D, и выполнено условие (114). Тогда из (112) следует, что $f_{mn} \equiv 0$ и поэтому на основании равенств (113) и (110) получим

$$\iint\limits_D u(x,t) X_m(x) T_n(t) dx dt = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (108) в пространстве $L_2(D)$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду в D. В силу (2) $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Если $\Delta_{m_0 n_0} = 0$ при некоторых $m = m_0$ и $n = n_0$, то есть когда $\alpha = n_0/m_0$, то однородная задача Дирихле для уравнения (1) при любом p в области D имеет ненулевое решение

$$u_{m_0 n_0}(x,t) = \sin(\mu_{m_0}) x \sin(\lambda_{n_0} t).$$

Таким образом, нами установлен критерий единственности решения задачи Дирихле при любом p.

Теорема 7. *Если существует решение задачи* (2), (4), (106) *и* (107), *то оно единственно только тогда, когда отношение сторон T_0/l прямоугольника D является иррациональным числом.*

Лемма 9. *Если $\alpha > 0$ является алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$, то существует такая постоянная $L_0 > 0$, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{mn}| \geqslant L_0 m^{-1-\varepsilon}(mn)^{p-1/2}. \tag{116}$$

Доказательство. Из равенства (115) на основании (34) имеем

$$|\Delta_{mn}| \geqslant \left(\frac{\pi}{T_0}\right)^{2p} \delta m^{-1-\varepsilon} 2\alpha^{p/2}(nm)^{p/2} p\alpha^{(p-1)/2}(mn)^{(p-1)/2} =$$
$$= L_0 m^{-1-\varepsilon}(mn)^{p-1/2}.$$

Формально из ряда (109) почленным дифференцированием составим ряд

$$\frac{\partial^{k+l}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^l} = \sum_{m,\,n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p f_{mn}}{\Delta_{mn}} X_m^{(k)}(x) T_n^{(l)}(t), \tag{117}$$

где $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $k + l \leqslant 2p$, который в силу оценки (116) мажорируется числовым рядом

$$L_1 \sum_{m,\,n=1}^{+\infty} \frac{|f_{mn}| m^k n^l}{|\Delta_{mn}|} \leqslant L_2 \sum_{m,\,n=1}^{+\infty} |f_{mn}| m^{3/2+\varepsilon+k-p} n^{l+1/2-p}. \tag{118}$$

Здесь и далее L_i ($i \in \mathbb{N}$) — положительные постоянные.

Лемма 10. *Если* $f(x,t) \in C^{2p+5}(\overline{D})$,

$$f_x^{(i)}(0,t) = f_x^{(i)}(l,t) = \begin{cases} 0, \quad i = 0, 2, \ldots, p+1, \\ \textit{когда} \;\; p+3 - \textit{четное}, \\ 0, \quad i = 0, 2, \ldots, p+2, \\ \textit{когда} \;\; p+3 - \textit{нечетное}, \end{cases}$$

$$f_t^{(j)}(x,0) = f_t^{(j)}(x,T_0) = \begin{cases} 0, \quad j = 0, 2, \ldots, p+1, \\ \textit{когда} \;\; p+2 - \textit{нечетное}, \\ 0, \quad j = 0, 2, \ldots, p, \\ \textit{когда} \;\; p+2 - \textit{четное}, \end{cases}$$

то справедлива оценка

$$|f_{mn}| \leqslant \frac{L_3}{m^{p+3} n^{p+2}}. \tag{119}$$

Доказательство. Правую часть равенства (112) представим в виде

$$f_{mn} = \frac{2}{\sqrt{lT_0}} \int_0^{T_0} \sin(\lambda_n t) dt \int_0^l f(x,t) \sin(\mu_m x) dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{lT_0}} \int_0^{T_0} P_m(t) \sin(\lambda_n t) dt, \tag{120}$$

где

$$P_m(t) = \int_0^l f(x,t) \sin(\mu_m x) dx. \tag{121}$$

В интеграле (121), проинтегрировав по частям $p+3$ раза с учетом условий леммы, получим

$$P_m(t) = \frac{L_4}{m^{p+3}} \int_0^l \frac{\partial^{p+3} f(x,t)}{\partial x^{p+3}} \widetilde{X}_{mp}(x) dx, \tag{122}$$

где

$$\widetilde{X}_{mp}(x) = \begin{cases} \sin(\mu_m x), & \text{если} \quad p+3 - \text{четное}, \\ \cos(\mu_m x), & \text{если} \quad p+3 - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Подставив (122) в (120) имеем

$$f_{mn} = \frac{L_5}{m^{p+3}} \int\limits_0^l \widetilde{X}_{mp}(x)dx \int\limits_0^{T_0} \frac{\partial^{p+3} f(x,t)}{\partial x^{p+3}} \sin(\lambda_n t)dt =$$

$$= \frac{L_5}{m^{p+3}} \int\limits_0^l \widetilde{X}_{mp}(x) \frac{\partial^{p+3}}{\partial x^{p+3}} q_n(x)dx, \quad (123)$$

где

$$Q_n(x) = \int\limits_0^{T_0} f(x,t)\sin(\lambda_n x)dx. \quad (124)$$

Интегрируя по частям $p+2$ раза в интеграле равенства (124), имеем

$$Q_n(x) = \frac{L_6}{n^{p+2}} \int\limits_0^{T_0} \frac{\partial^{p+2} f(x,t)}{\partial t^{p+2}} \widetilde{T}_{np}(t)dt, \quad (125)$$

где

$$\widetilde{T}_{np}(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_n t), & \text{если} \quad p+2 - \text{четное}, \\ \cos(\lambda_n t), & \text{если} \quad p+2 - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Теперь, подставив (125) в равенство (123), получим

$$f_{mn} = \frac{L_7}{m^{p+3} n^{p+2}} \iint\limits_D \frac{\partial^{2p+5} f(x,t)}{\partial x^{p+3} \partial t^{p+2}} \widetilde{X}_{mp}(x) \widetilde{T}_{np}(t)dxdt.$$

Отсюда следует справедливость (119).

Теперь в силу оценки (119) ряд (118) оценивается рядом

$$L_8 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2p-k+3/2-\varepsilon}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p-l+3/2}}. \quad (126)$$

В силу сходимости ряда (126) все ряды вида (124) сходятся равномерно в $\overline{D}$. Тем самым установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Если число* α *и функция* $f(x,t)$ *удовлетворяют условиям лемм 9 и 10, то существует единственное решение задачи* (2), (4), (106), (107), *которое определяется рядом* (109).

Замечание 3. Сопоставляя теоремы 2, 4, 6 и 8, видим, что при доказательстве существования решения задачи Дирихле в случае $p = 1, 2, 3$ требуется меньшая гладкость от граничных функций $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, чем в общем случае от правой части $f(x,t)$ уравнения (106). Поскольку случаи $p = 1, 2$ представляют практический интерес [5, 10, 11], то подход, предложенный в пунктах 1.1 – 1.3, позволяет получить теоремы существования решения задачи Дирихле при более слабых условиях на граничные функции.

Отметим, что в работе [9] задача Дирихле изучена для более общего уравнения, чем (106), в прямоугольнике D, где $l = 1$, $T_0 \leqslant 1$, и почти для всех T_0 доказана разрешимость этой задачи. Из данного результата не ясно, для каких чисел $T_0 \leqslant 1$ имеет место существование решения задачи Дирихле.

§2. Задача Дирихле для трехмерных уравнений с частными производными высоких порядков и проблема Ферма

Рассмотрим уравнение в частных производных (7) в прямоугольном параллелепипеде Q и поставим задачу (8) – (11). Введем следующие системы функций:

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} x = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\mu_{1m} x), \quad m = 1, 2, \dots ,$$

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin \frac{\pi n}{q} y = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin(\mu_{2n} y), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

$$T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi k}{T} t = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\lambda_k t), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

каждая из них ортонормирована, полна и образует базис соответственно в пространствах $L_2[0,l]$, $L_2[0,q]$ и $L_2[0,T]$. Как известно, их произведение

$$X_m(x)Y_n(y)T_k(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{lqT}} \sin(\mu_{1m}x)\sin(\mu_{2n}y)\sin(\lambda_k t) \qquad (127)$$

образует систему, которая ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2(Q)$.

Решение задачи (8) – (11) будем искать в виде суммы

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} u_{mnk} X_m(x)Y_n(y)T_k(t). \qquad (128)$$

Предположим, что существует решение $u(x,y,t)$ задачи (8) – (11). Тогда коэффициенты ряда (128) однозначно находятся по формуле

$$u_{mnk} = \iiint\limits_Q u(x,y,t)X_m(x)Y_n(y)T_k(t)dxdydt. \qquad (129)$$

Допустим, что $f(x,y,t)$ — достаточно гладкая функция, обращающаяся в нуль на боковых сторонах параллелепипеда Q со своими нужными производными. Тогда функцию f можно единственным образом разложить в ряд по системе (127):

$$f(x,y,t) = \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} f_{mnk} X_m(x)Y_n(y)T_k(t), \qquad (130)$$

где

$$f_{mnk} = \iiint\limits_Q f(x,y,t)X_m(x)Y_n(y)T_k(t)dxdydt. \qquad (131)$$

Подставив (128) и (130) в исходное уравнение (8), найдем коэффициенты

$$u_{mnk} = \frac{(-1)^p f_{mnk}}{\lambda_k^{2p} - \mu_{1m}^{2p} - \mu_{2n}^{2p}}, \tag{132}$$

когда при всех $m, n, k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{mnk} = \lambda_k^{2p} - \mu_{1m}^{2p} - \mu_{2n}^{2p} = \pi^{2p}\left[\left(\frac{k}{T}\right)^{2p} - \left(\frac{m}{l}\right)^{2p} - \left(\frac{n}{q}\right)^{2p}\right] =$$
$$= \pi^{2p}\widetilde{\Delta}_{mnk} \neq 0. \tag{133}$$

Мы теперь в состоянии доказать единственность решения задачи (8) – (11). Пусть функция $u(x,y,t)$ является решением однородной задачи (8) – (11), где $f(x,y,t) \equiv 0$ в Q, и выполнены условия (133) при всех m, n, k из $\mathbb{N}$, т. е. уравнение $\widetilde{\Delta}_{mnk} = 0$ не разрешимо во множестве натуральных чисел относительно m, n, k. Тогда из (131) следует, что $f_{mnk} \equiv 0$. В силу этого из равенств (132) и (129) получим

$$\iiint\limits_Q u(x,y,t) X_m(x) Y_n(y) T_k(t) dxdydt = 0. \tag{134}$$

На основании (134) из полноты системы (127) в $L_2(Q)$ следует, что $u(x,y,t) = 0$ почти всюду в Q, а в силу (8) функция $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Если при некоторых $m = m_0$, $n = n_0$ и $k = k_0$ выражение $\Delta_{m_0 n_0 k_0} = 0$, то однородная задача Дирихле для уравнения (7) при $f(x,y,t) \equiv 0$ и любом p в области Q имеет ненулевое решение

$$u_{m_0 n_0 k_0}(x,y,t) = \sin(\mu_{1m_0} x)\sin(\mu_{2n_0} y)\sin(\lambda_{k_0} t). \tag{135}$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 9. *Если существует решение задачи* (8) – (11), *то оно единственно только тогда, когда при всех* m, n, k *из* $\mathbb{N}$ *выполнены условия* (133), *т. е. когда уравнение* $\widetilde{\Delta}_{mnk} = 0$ *не разрешимо во множестве натуральных чисел.*

Если $l = q = T$, т.е. Q – куб, то уравнение $\widetilde{\Delta}_{mnk} = 0$ переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p} + n^{2p} = k^{2p}. \tag{136}$$

Когда $q = l$, уравнение $\widetilde{\Delta}_{mnk} = 0$ равносильно уравнению

$$m^{2p} + n^{2p} = \left(\frac{l}{T}k\right)^{2p}. \tag{137}$$

Отсюда видно, что если отношение l/T является рациональным числом, то уравнение (137) сводится к уравнению типа (136).

Таким образом, если $l = q = T$, или $q = l \neq T$, $l/T \in \mathbb{Q}$, или $q = T \neq l$, $T/l \in \mathbb{Q}$, то в силу доказанной теоремы 1 единственность решения задачи Дирихле для уравнения (7) при любом $p \in \mathbb{N}$ равносильна великой проблеме Ферма для уравнения типа (136).

В общем случае, т.е. когда l, q и T — любые положительные числа, вопрос об единственности решения задачи (8) – (11) равносилен тому, что уравнение

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p} + \left(\frac{n}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{k}{T}\right)^{2p}.$$

не разрешимо во множестве $\mathbb{N}$.

Отметим, что задача (8) – (11) при $p = 1$ изучена в работе [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Huber A. *Die. erste Randwertaufgabc fur gesshlossene Bereiche bei der Gluchung* $u_{xy} = f(x, y)$ // Monatsh. Math. and Phys. - 1932. - V. 39. - S. 79-100.

2. Mangeron P. *Sopra un problem al contorno per un'equazione differeziale alle derivate parziali di quarto ordino con le caratteristiche realidoppie* // Rend. Accad. sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett. et arti Napoli. - 1932. - No 2. - P. 29-40.

3. Bourgin P.G., Duffin R. *The Diriclet problem the virbating string equation* // Bull. Amer. Math. Soc. - 1939. - V. 45. - No 12. - P. 851-858.

4. John F. *Diriclet problem for a hyperbolic equation* // Amer. J. Math. - 1941. - V. 63. - No 1. - P. 141-154.

5. Соболев С.Л. *Пример корректной задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе* // ДАН СССР. - 1956. - Т. 73. - № 4. - С. 707-709.

6. Александрян Р.А. *О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге* // ДАН СССР. - 1950. - Т. 73. - № 5. - С. 869-872.

7. Вахания Н.Н. *Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны* // ДАН СССР. - 1957. - Т. 116. - № 6. - С. 906-909.

8. Березанский Ю.М. *О задаче Дирихле для уравнения колебания струны* // Украинский матем. журнал. - 1960. - Т. 12. - № 4. - С. 363-372.

9. Мосолов П.П. *О задаче Дирихле для уравнений в частных производных* // Изв. вузов. Матем. - 1960. - № 3. - С. 213-218.

10. Арнольд В.И. *Малые знаменатели, I* // Изв. АН СССР. Серия матем. - 1961. - Т. 25. - С. 21-86.

11. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* – Киев: Наукова думка, 1965. – 798 с.

12. Сабитов К.Б. *О задаче Дирихле для уравнения струны* // Труды Стерлитамакского филиала АН Республики Башкортостан. Серия "Физико-математические и технические науки". – Уфа: Гилем, 2006. – С. 169-176.

13. Ильин В.А. *О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений* // УМН. – 1960. – Т. 15. – С. 97-154.

14. Ильин В.А. *Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 91-101.

15. Хинчин А.Я. *Цепные дроби.* – М.: Наука, 1978. – 112 с.

16. Бухштаб А.А. *Теория чисел.* – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

17. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды. Т. 1.* – М.: Мир, 1965. – 616 с.

18. Денчев Р. *О задаче Дирихле для волнового уравнения* // ДАН СССР. - 1959. - Т. 127. - № 3. - С. 501-504.