А.Н. Миронов

Елабужский государственный педагогический университет,
lbmironova@yandex.ru

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Уравнением Бианки ряд авторов (см., например, [1]) называет уравнение со старшей частной производной вида

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $D_1 = \partial^n/\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n$, D_2 — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Однородное уравнение Бианки порядка $n = 3$ может быть представлено в виде

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{1}$$

Совокупность преобразований эквивалентности для (1)

$$\overline{x} = \alpha(x), \quad \overline{y} = \beta(y), \quad \overline{z} = \gamma(z), \quad u = \omega(x, y, z)\overline{u}. \tag{2}$$

Два уравнения вида (1) называются эквивалентными по функции [3, с. 117], если они переходят друг в друга при преобразованиях (2), в которых

$$\alpha(x) = x, \quad \beta(y) = y, \quad \gamma(z) = z.$$

В [2] было показано, что два уравнения вида (1) эквивалентны по функции тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа

$$\begin{gathered}
H_1 = a_y + ac - d,\ H_2 = a_x + ab - e,\ H_3 = c_x + bc - f,\\
H_4 = b_z + ab - e,\ H_5 = b_y + bc - f,\ H_6 = c_z + ac - d,\\
H_7 = a_{xy} + bd + ce + af - 2abc - g,\\
H_8 = b_{yz} + bd + ce + af - 2abc - g,\\
H_9 = c_{xz} + bd + ce + af - 2abc - g
\end{gathered} \tag{3}$$

одинаковы для обоих уравнений.

Конструкции $H_1, \ldots, H_6$ использовались в [4], [5] при построении явных формул для функции Римана и решений уравнения (1) в квадратурах.

Из результатов работы [2] непосредственно следует

Теорема. *Два уравнения вида* (1) *с наборами инвариантов Лапласа* $H_1, H_2, \ldots, H_9$ *и* $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \ldots, \overline{H}_9$ *соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$\begin{gathered}
H_1 = \beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_1, \quad H_2 = \alpha'(x)\gamma'(z)\overline{H}_2,\\
H_3 = \alpha'(x)\beta'(y)\overline{H}_3, \quad H_4 = \alpha'(x)\gamma'(z)\overline{H}_4,\\
H_5 = \alpha'(x)\beta'(y)\overline{H}_5, \quad H_6 = \beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_6,\\
H_i = \alpha'(x)\beta'(y)\gamma'(z)\overline{H}_i, \quad i = 7,\ 8,\ 9.
\end{gathered}$$

Если искать допускаемый уравнением (1) оператор

$$\alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma\partial_z + \tau\partial_u,$$

то оказывается, что часть системы определяющих уравнений составят

$$\partial_u\alpha = \partial_u\beta = \partial_u\gamma = 0, \quad \partial_u^2\tau = 0.$$

Известно [3, с. 99-100], что в таком случае алгебра Ли уравнения (1) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi^1(x,y,z)\partial_x + \xi^2(x,y,z)\partial_y + \xi^3(x,y,z)\partial_z + \sigma(x,y,z)u\partial_u, \quad (4)$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x,y,z)\partial_u$, где ω — решение уравнения (1). Ясно, что оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (1), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и считать, что $\sigma(x,y,z)$ определяется в (4) с точностью до постоянного слагаемого.

Введем в рассмотрение отношения

$$p_{12} = \frac{H_3}{H_5}, \quad p_{13} = \frac{H_2}{H_4}, \quad p_{23} = \frac{H_1}{H_6},$$

а также конструкции

$$\begin{gathered}
q_1 = \frac{(\ln H_1)_{yz}}{H_1}, \quad q_2 = \frac{(\ln H_2)_{xz}}{H_2}, \quad q_3 = \frac{(\ln H_3)_{xy}}{H_3}, \\
q_4 = \frac{(\ln H_4)_{xz}}{H_4}, \quad q_5 = \frac{(\ln H_5)_{xy}}{H_2}, \quad q_6 = \frac{(\ln H_6)_{yz}}{H_6}, \\
q_i = \frac{(\ln H_i)_{xyz}}{H_i}, \quad i = 7,\ 8,\ 9.
\end{gathered}$$

Рассмотрим задачу групповой классификации уравнений вида (1), для которых p_{12}, p_{13}, p_{23} и q_4, q_5, q_6 постоянны. При этом ограничимся случаями с H_7, H_8, H_9, тождественно равными нулю.

Сформулированная выше теорема позволяет рассматривать по одному конкретному уравнению в каждом классе эквивалентности. Кроме того, очевидно, что перестановки переменных позволяют не рассматривать конструкции

$$p_{21} = \frac{H_5}{H_3}, \quad p_{31} = \frac{H_4}{H_2}, \quad p_{32} = \frac{H_6}{H_1}, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3.$$

Перечислим возможные случаи с указанными выше постоянными инвариантами преобразования (4). Анализ определяющих уравнений всюду проводится аналогично изложенному в [3, с. 124-125].

Сначала перечислим варианты, которые характеризуются условиями: если $H_i \neq 0$, то $q_i = 0$, $i = \overline{1,6}$.

1. $H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0$, $H_1 = p_{23}$, $H_6 = 1$.

2. $H_3 = H_5 = 0$, $H_1 = p_{23}$, $H_2 = p_{13}$, $H_4 = H_6 = 1$.

3. $H_1 = p_{23}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = p_{12}$, $H_4 = H_5 = H_6 = 1$.

Следующие три варианта характеризуются условиями: если $H_i \neq 0$, то $q_i \neq 0$, $i = \overline{1,6}$.

4. $H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = 0$, $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$.

5. $H_3 = H_5 = 0$, $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = \frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}$, $H_4 = \frac{2/q_4}{(x+z)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$.

6. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = \frac{2p_{13}/q_4}{(x+z)^2}$, $H_3 = \frac{2p_{12}/q_5}{(x+y)^2}$, $H_4 = \frac{2/q_4}{(x+z)^2}$, $H_5 = \frac{2/q_5}{(x+y)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$.

Оставшиеся варианты носят <смешанный> характер: имеются как $q_i \neq 0$, так и $q_i = 0$. Здесь постоянные p_{12}, p_{13}, p_{23}, s_1, s_2 могут равняться нулю, но при этом либо одна из постоянных s_1, s_2 равна 1, либо обе.

7. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = p_{13}$, $H_3 = p_{12}$, $H_4 = s_1 = \text{const}$, $H_5 = s_2 = \text{const}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$.

8. $H_1 = \frac{2p_{23}/q_6}{(y+z)^2}$, $H_2 = s_1 = \text{const}$, $H_3 = \frac{2p_{12}/q_3}{(x+y)^2}$, $H_4 = s_2 = \text{const}$, $H_5 = \frac{2/q_5}{(x+y)^2}$, $H_6 = \frac{2/q_6}{(y+z)^2}$.

Например, в случае 1 соответствующее уравнение имеет вид

$$u_{xyz} + p_{23}yu_{xy} + zu_{xz} + p_{23}yzu_x = 0$$

и допускает алгебру Ли операторов

$$X = \xi^1(x)\partial_x + (C_1y + C_2)\partial_y - (C_1z - C_3)\partial_z - (C_3y + C_2p_{23}z)u\partial_u,$$

где коэффициент $\xi^1(x)$ произволен. Следовательно, допускаемая данным уравнением алгебра L^r бесконечномерна, $r = \infty$.

Таким образом, выделено 8 классов уравнений, которые допускают алгебры Ли L^r, где r принимает значения 1, 3, 4 и ∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2001. – 226 с.

2. Джохадзе О.М. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 58-68.

3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

4. Жегалов В.И. *О трехмерной функции Римана* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 5. – С. 1074-1079.

5. Жегалов В.И. *О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах* // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 7. – С. 47-52.