

УДК 531.662

**ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ОРТОТРОПНЫХ
КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ЛОКАЛЬНЫМИ
ИЗМЕНЕНИЯМИ ТОЛЩИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ
УДАРЕ**

Р.Ф. Мухутдинов, Ф.Г. Шигабутдинов

Аннотация

Исследуются продольно-поперечные движения конических оболочек с локальными изменениями толщины при продольных ударах абсолютно твердым телом. Для анализа процесса волнообразования используются геометрически нелинейные дифференциальные уравнения продольно-поперечных движений тонкой ортотропной оболочки типа Тимошенко, учитывающие сдвиг и инерцию вращения. Результаты решений представлены в виде двумерных и трехмерных графиков, отображающих картину волнообразования. **Ключевые слова:** (коническая оболочка, цилиндрическая оболочка, переменная толщина, продольный удар, прогиб, волнообразование)

1. Введение

На сегодняшний день во всех областях промышленности и строительства используются оболочечные конструкции. Многие из этих элементов подвергаются ударному воздействию, как при изготовлении, так и в процессе эксплуатации. Например, удары возникают при посадке различных летательных аппаратов и в строительных конструкциях при внештатном режиме эксплуатации. На несанкционированное ударное воздействие рассчитывают защитные оболочки атомных реакторов, контейнеров для перевозки отходов атомной энергетики и т.д.

Имеющиеся в открытой печати публикации в большей части относятся к исследованию движений при ударе по цилиндрическим оболочкам. В то же время конические оболочки находят широкое применение в конструкциях летательных аппаратов и в ракетостроении. Обзор работ в области динамического поведения тонкостенных конструкций до 1972 года можно найти в [1]. Обстоятельный обзор более поздних работ с оценкой эффективности и рекомендациями по применению численных методов приведен в [2]. Из работ, имеющих непосредственное отношение к теме данной статьи, отметим исследования [3] - [6], в которых рассматривалось динамическое выпучивание изотропных тонких цилиндрических оболочек, в качестве метода решения дифференциальных уравнений движения использовался метод конечных разностей. Появление новых композитных материалов, их широкое использование, а также совершенствование технологий изготовления элементов конструкций строительной и машиностроительной отрасли усилило интерес к исследованию поведения этих элементов и материалов, в том числе и при ударном воздействии. В этом направлении выполнены работы [7] - [12]. В работах [3] - [9] рассматривались лишь оболочки постоянной толщины. Выпучивание цилиндрических ортотропных оболочек с подкрепляющими ребрами жесткости рассматривались в [11]. Влияние локальных дефектов на выпучивание ортотропных цилиндрических оболочек рассматривалось в [12].

В данной работе исследуется влияние локальных изменений толщины ортотропных конических оболочек при продольном ударе абсолютно твердым телом. Появление таких «нерегулярностей» в геометрии может быть вызвано, как дефектами изготовления, так и техническими требованиями или конструктивными особенностями. В первом случае зона оболочки с измененной толщиной будет иметь малые размеры, какие только позволяет рассмотреть использованный метод конечных разностей, во втором случае приходится говорить об оболочке с переменной толщиной.

2. Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени ортотропная коническая оболочка переменной толщины подвергается удару абсолютно твердым телом. Начало правой системы координат $Oxyz$ расположено на левом торце оболочки, воспринимающем удар. Ось Ox направлена вправо, ось Oz в сторону выпуклости оболочки. Оболочка лежит в области $x > 0$. Геометрия конуса вводится аналогично [1]: определим некоторый «основной» цилиндр длины L и радиуса R_0 и будем рассматривать коническую поверхность, образующие которых проходят через среднее сечение оболочки под углом α к образующей цилиндра (рис.1).

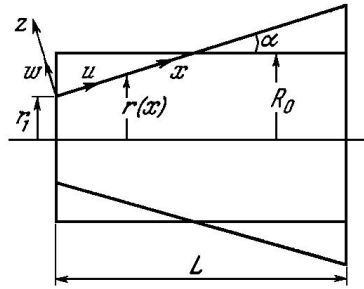


Рис. 1. Геометрия конической оболочки

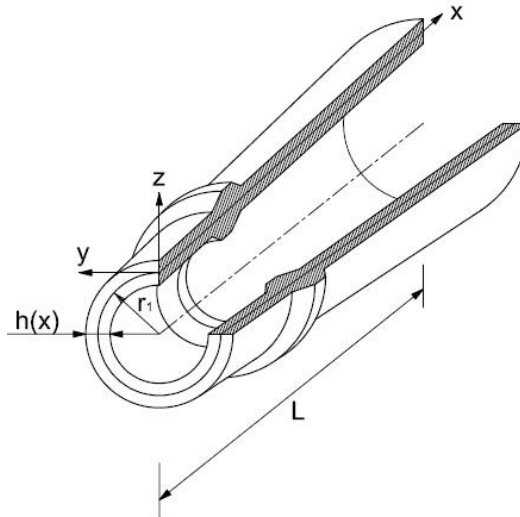


Рис. 2. Общий вид оболочки

На рис.2 показан общий вид оболочки. Здесь же для наглядности изменения толщины вдоль длины оболочки изображен вырез четверти оболочки в продольном направлении. Сам характер изменения толщины вдоль длины оболочки, т.е. продольное сечение с одним из вариантов расположения шпангоута изображен на рис.3, здесь l – длина образующей конической оболочки.

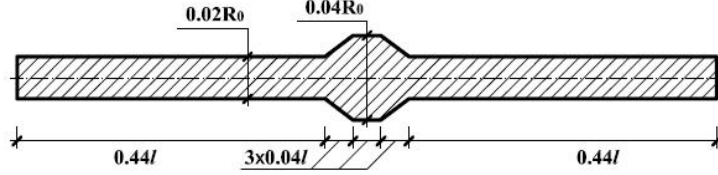


Рис. 3. Продольное сечение оболочки

Предполагается, что изменение толщины оболочки в зоне шпангоутов происходит без скачков, при составлении разностной схемы их геометрия описывается линейными функциями. В работе рассматриваются только начальные стадии поперечных движений оболочки, когда движения оболочки можно считать осесимметричным. Материал оболочки предполагается неограниченно упругим, чтобы иметь возможность провести исследование при значительных скоростях нагружения. Главные оси ортотропии совпадают с направлением главных кривизн срединной поверхности оболочки.

Геометрически нелинейные дифференциальные уравнения продольно–поперечных движений тонкой оболочки типа Тимошенко, учитывающие переменность толщины, сдвиг и инерцию вращения элемента оболочки и описывающие осесимметричные движения, получены из уравнений К.З. Галимова [13] и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (rT_{11}) - T_{22} \frac{\sin\alpha}{r} &= \rho h \ddot{u} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} [r(N + T_{11}) \frac{\partial w}{\partial x}] - T_{22} \frac{\cos\alpha}{r} &= \rho h \ddot{w} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (rM_{11}) - M_{22} \frac{\sin\alpha}{r} - N &= \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Соотношения физического закона упругости приняты в виде:

$$T_{11} = K_1 h (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2); T_{22} = K_2 h (\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1); \quad (2)$$

$$M_{11} = \frac{K_1 h^3}{12} (\chi_1 + \nu_2 \chi_2); M_{22} = \frac{K_2 h^3}{12} (\chi_2 + \nu_1 \chi_1); \quad (3)$$

$$N = K^2 G_{13} h \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \right); \quad (4)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \varepsilon_2 = \frac{1}{r} (u \sin\alpha + w \cos\alpha); \quad (5)$$

$$\chi_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \chi_2 = \frac{\gamma}{r} \sin\alpha; K_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; K_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}. \quad (6)$$

Здесь u, v, w – перемещения точек поверхности приведения оболочки вдоль осей x, y, z соответственно, γ – угол поворота нормали к срединной поверхности. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат.

K^2 – коэффициент сдвига, G_{13} – модуль сдвига. T_{11} , T_{22} – усилия в срединной поверхности оболочки, M_{11} – изгибающий момент, N – перерезывающая сила.

Условия закрепления оболочек: подвижная шарнирная опора на левом торце, воспринимающем удар и жесткая заделка на правом торце. Начальные условия для перемещений и деформаций приняты нулевыми.

3. Решение задачи и обсуждение результатов

Система дифференциальных уравнений (1) и соотношения физического закона упругости (2)–(6) записывались в виде явной конечно–разностной схемы типа «крест». Значения безразмерных шагов сетки, как и в работах [10] – [12] принимались $\Delta x=0.005$ – по пространственной координате и $\Delta t=0.0025$ – по временной координате. Величины шагов были выбраны в ходе анализа результатов числовых экспериментов с нелинейной разностной схемой задачи и соответствуют рекомендациям работы [14] – шаг по продольной координате не превышает трети толщины оболочки. Устойчивость разностной схемы проверялась сгущением сетки, проводились расчеты при различных шагах $\Delta t=0.005$; 0.0025 ; 0.00125 по временной координате и различных шагах $\Delta x=0.01$; 0.005 ; 0.0125 по пространственной координате. Оптимальным с точки зрения устойчивости счета, сходимости счета и времени вычислений оказалось указанное соотношение $\mu = \Delta t/\Delta x=0.5$. С той же целью при тестировании разностной схемы и метода решения счет проводился до значений времени, соответствующего времени 24 пробегов продольной волны вдоль оболочки. Во всех случаях наблюдалась устойчивость счета. Схема оставалась устойчивой и при увеличении скорости удара.

Часть результатов вычислений приведена на рис.4–12. Для анализа влияния формы оболочки и расположения локальных изменений толщины на рис.4–10 попарно представлены картины волнообразования для конических и цилиндрических оболочек в различные моменты времени. Слева изображено выпучивание конической оболочки, справа – цилиндрической оболочки тех же параметров. На всех графиках для большей наглядности показано расположение шпангоута по длине оболочки и форма оболочки. Длина конической оболочки во всех случаях принималась равной $L=2$ м, радиус срединной поверхности «основного» цилиндра $R_0=1$ м. Все рассматриваемые оболочки имеют углы наклона образующей $\alpha = 0^\circ - 10^\circ$. Для сравнения также рассчитывались цилиндрические оболочки с размерами «основного» цилиндра и аналогичным характером изменения толщины вдоль длины оболочки. То что материал оболочек принимается бесконечно упругим, дает возможность рассмотреть удары телом с большими скоростями. Во всех приведенных ниже вариантах счета скорость удара принималась равной 40м/с. Отношение модулей упругости $E_2/E_1=0.5$; отношение модуля сдвига к большему из модулей упругости было равно $G/E_1=0.4$.

Отношение массы оболочки к массе ударяющего тела принималось равным 0.1. На графиках прогибы отнесены к толщине оболочки вне зоны шпангоута $h = h_0=0.02$ м. Обезразмеривание параметра времени произведено по формуле $T = t/t_0$, где t – физическое время, истекшее с момента удара, t_0 – время однократного пробега продольной волны вдоль длины оболочки. Для сравнения на всех приведенных рисунках штрихпунктирными линиями показаны формы движения той же оболочки постоянной толщины, в те же моменты времени. При этом на всех приведенных рисунках меньшему моменту времени соответствует ниже лежащий график.

На рис.4 показаны формы движения конической и цилиндрической оболочек к моментам времени $T=1$, что соответствует первому пробегу волны вдоль оболочки.

Здесь волна движется от ударяемого торца к заделанному торцу оболочки. Шпангоут примыкает к левому торцу оболочки, по которому был нанесен удар, толщина шпангоута составляет 0.04м, то есть вдвое превышает толщину оболочки.

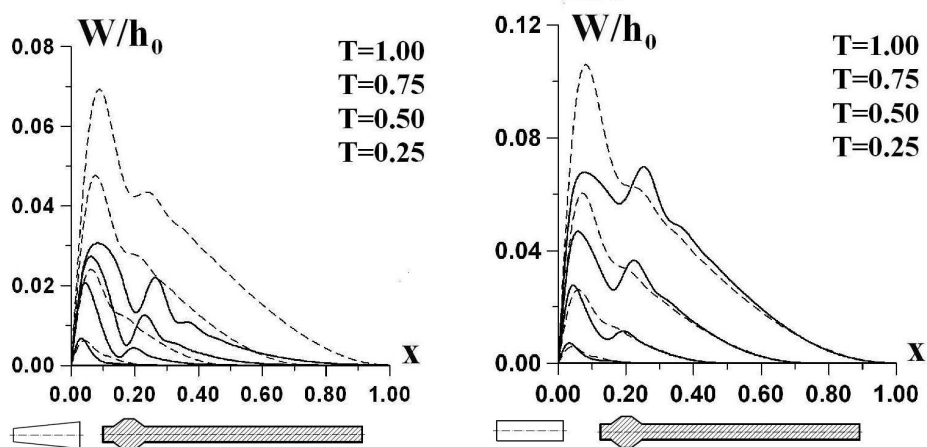
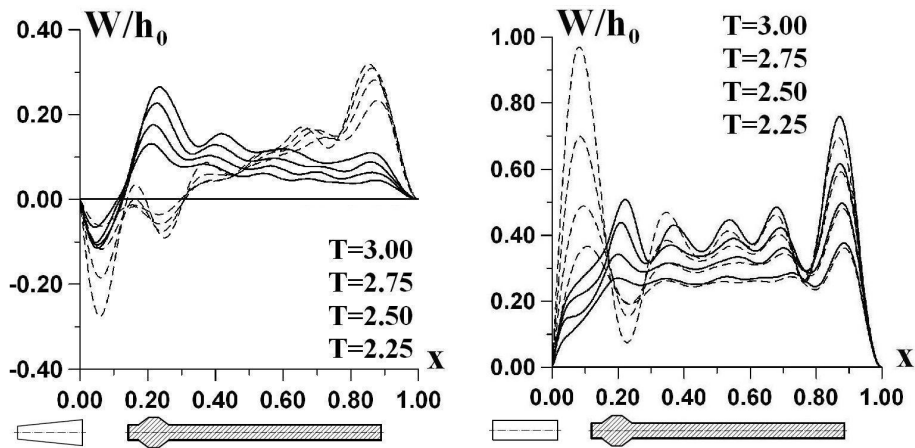
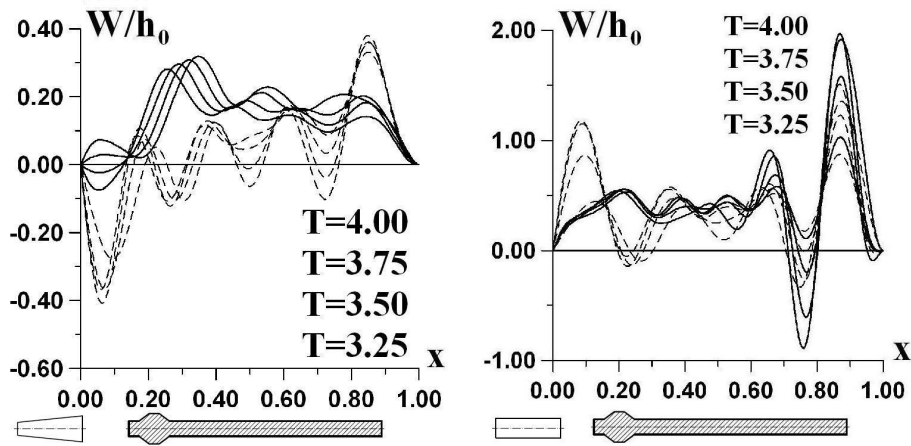
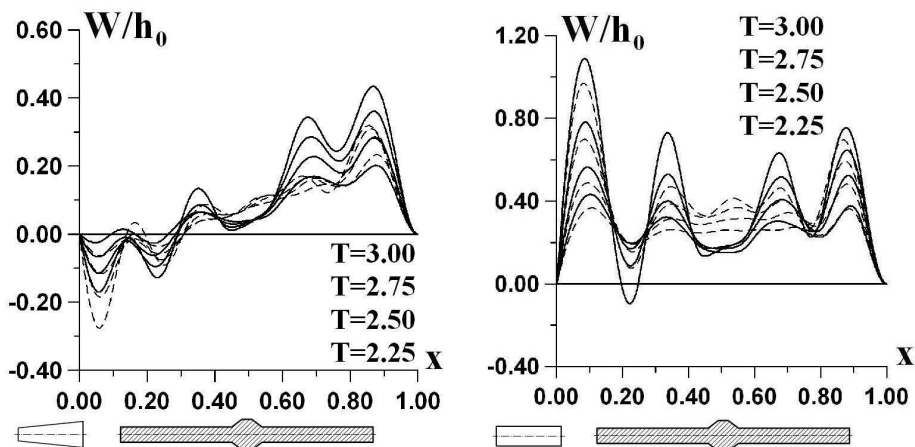


Рис. 4. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=1$

От ударяемого торца начинает распространяться волна поперечных прогибов. Вплоть до достижения продольной волной второго торца оболочки, зона с максимальными прогибами примыкает к ударяемому торцу. Прогибы в конических оболочках более чувствительны к наличию шпангоута по сравнению с цилиндрическими оболочками. При расположении шпангоута вблизи ударяемого торца максимальные значения прогибов уменьшаются в 2.3 раза для конической оболочки и в 1.3 раза - для цилиндрической, по сравнению с оболочками постоянной толщины. Если же участок с измененной толщиной расположить в середине оболочки или на правом торце, то при первом прохождении волны картины волнообразования для оболочек переменной толщины совпадают с картинами волнообразования оболочек постоянной толщины. В зоне заделанного торца, где прогибы отличаются, расхождение не превышает 2-5 процентов. В целом величины максимальных прогибов у конической оболочки, как постоянной толщины, так и со шпангоутом меньше, чем у цилиндрической оболочки с размерами «основного» цилиндра конической оболочки и аналогичным расположением шпангоута вдоль длины оболочки. В этом проявляется инерционность динамического процесса выпучивания. Другими словами на изменение продольного напряженного состояния оболочка реагирует с некоторым запаздыванием. Эта особенно ярко наблюдается на последующих прохождениях волны вдоль оболочки.

На рис.5-6 показаны результаты вычислений для третьего и четвертого пробега волны вдоль оболочки, $T=3$ и $T=4$ соответственно. Шпангоут, расположенный вблизи ударяемого торца как для конической, так и для цилиндрической оболочек приводит к уменьшению прогиба на ударяемом торце, в зоне усиления. В конической оболочке максимальный прогиб смещается от заделанного торца к ударяемому. При $T=4$ максимальные величины прогибов для конических оболочек уменьшаются, а для цилиндрических - увеличиваются. В цилиндрических оболочках прогибы достигают двух толщин оболочки, в конических - 0.4 толщины оболочки. Это связано со знакопеременностью прогибов в конической оболочке. В цилиндрической оболочке прогибы внутрь оболочки появляются значительно позже.

Рис. 5. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=3$ Рис. 6. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=4$ Рис. 7. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=3$

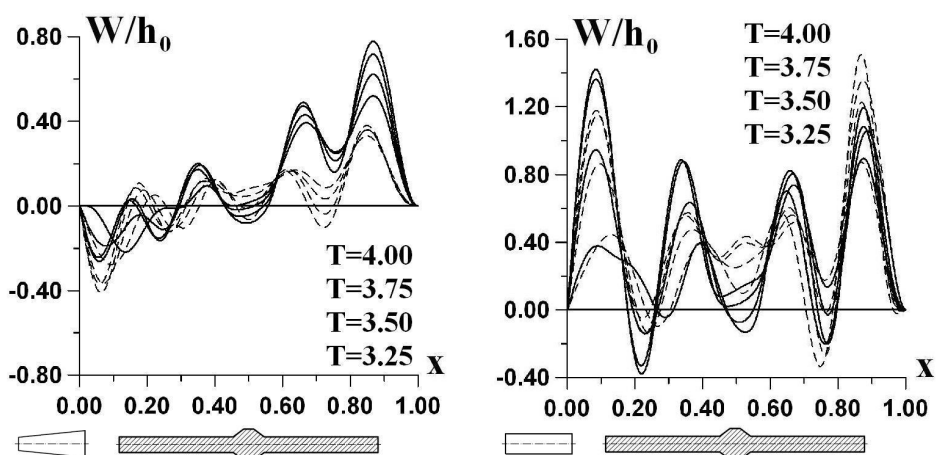


Рис. 8. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=4$

Картины волнообразования для оболочек со шпангоутом, расположенным в середине оболочки в моменты времени $T=3$ и $T=4$ показаны на рис.7-8. Наличие шпангоута в середине оболочки увеличивает прогибы как в конической так и в цилиндрической оболочках. В отличие от цилиндрической, где наблюдается незначительное изменение прогибов, коническая оболочка увеличивает максимальные прогибы в 1,5-2 раза.

На рис.9-10 изображены результаты вычислений оболочек со шпангоутом вблизи заделанного торца для третьего и четвертого пробега волны вдоль длины оболочки. По рисункам видно что в конической оболочке наличие шпангоута приводит к незначительному уменьшению прогибов (в пределах 10-15 процентов). Для цилиндрической оболочки уменьшение прогибов на заделанном торце сопровождается увеличением прогибов на ударяемом торце.

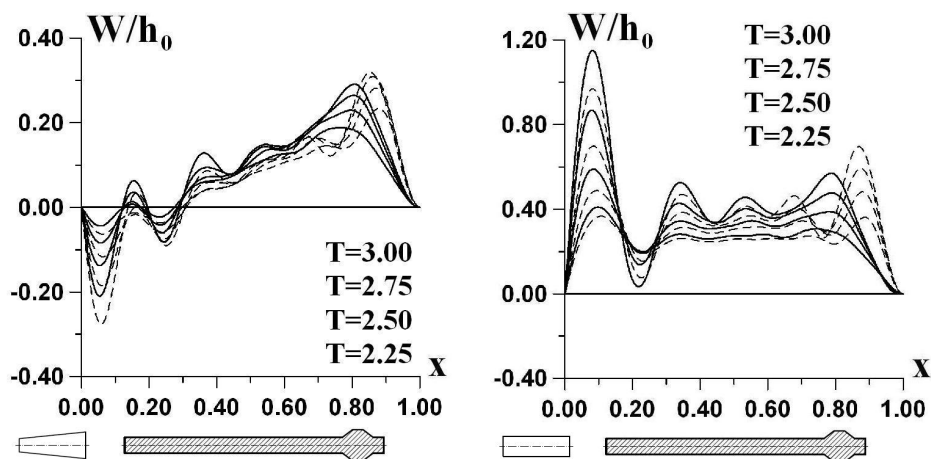


Рис. 9. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=3$

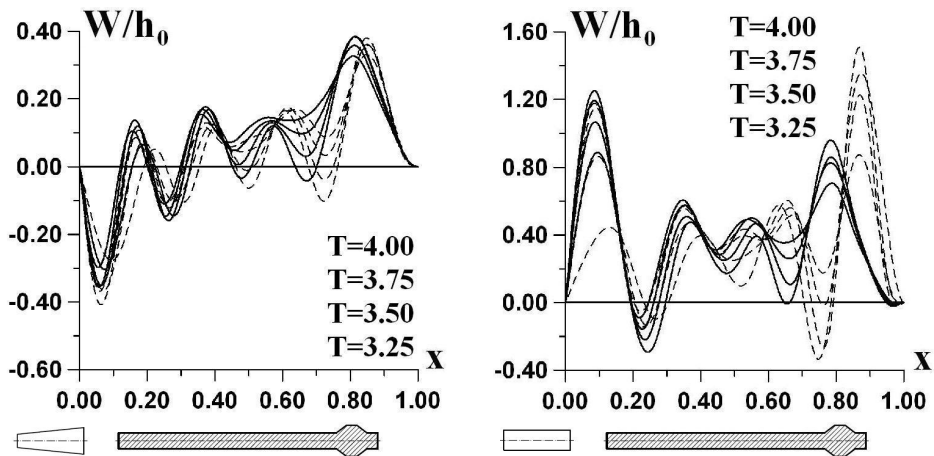
Рис. 10. Прогибы конической и цилиндрической оболочек $T=4$

Рис.11 иллюстрирует влияние угла наклона образующей конической оболочки на картину волнообразования. Здесь показаны относительные прогибы конических оболочек, со шпангоутом в средней части оболочки, с углами наклона образующей $\alpha = 0^\circ, 3^\circ, 7^\circ, 10^\circ$, в момент времени $T=3$. Для контроля вычислений осуществлен численный предельный переход к цилиндрической оболочке. Результаты вычисления для конической оболочки $\alpha = 0^\circ$ совпали с результатами вычислений для цилиндрической оболочки. По рис.11 видно, что увеличение угла наклона приводит к образованию прогибов внутрь оболочки на ударяемом торце и уменьшению полуволн. Увеличение угла приводит к меньшим прогибам оболочки.

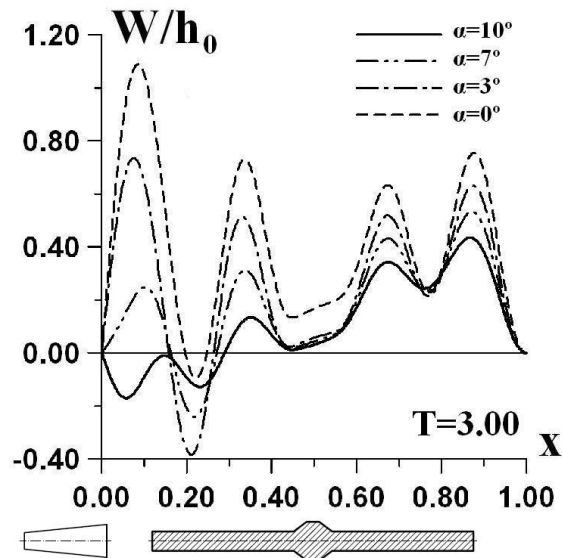


Рис. 11. Влияние угла наклона образующей

На рис.12 приведена развертка во времени всего процесса выпучивания конической оболочки со шпангоутом в средней части, для шести пробегов волны вдоль оболочки. В виде пространственной поверхности представлены 24 графика проги-

бов оболочки. Первая ось соответствует безразмерной длине оболочки x , значение $x=0$ соответствует ударяемому торцу, безразмерное значение $x=1.0$ соответствует заделанному торцу оболочки. Вдоль второй оси откладывается безразмерное время T . По третьей оси откладываются относительные прогибы оболочки W/h_0 , где h_0 – толщина оболочки на торце, воспринимающем удар. Приведенная поверхность позволяет качественно рассмотреть процесс выпучивания в каждом конкретном сечении балки. К шестому пробегу волны вдоль оболочки максимальный относительный прогиб достигает одной толщины оболочки, но не остается в этом сечении оболочки при дальнейшем счете.

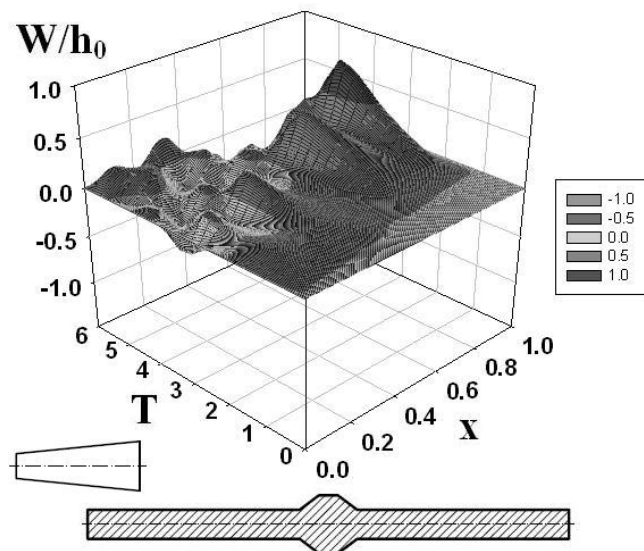


Рис. 12. Картина волнообразования

Заключение

Результаты вычислений показали, что поведение локально усиленных оболочек при продольном ударе носит сложный характер и зависит от многих факторов. В частности наличие одного шпангоута может привести как к увеличению максимальных прогибов, так и к их уменьшению в различные моменты времени.

Литература

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. *Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.* Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Изв. РАН, МТТ. – 2001. – № 5. – С. 156–173.
3. *Борисенко В.И., Клокова А.И.* Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе // АН УССР, Прикладная механика. – 1966. – том II. – в.10. – С. 29–35.
4. *Гордиенко Б.А.* Экспериментальное исследование поведения стержней и цилиндрических оболочек при ударе // Материалы к VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1969. – С. 190–193.
5. *Гордиенко Б.А.* Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе // Изв. РАН, МТТ. – 1970. – № 3. – С. 143–148.

6. *Кийко И.А.* Продольный удар по тонкой цилиндрической оболочке // Вестник МГУ, Математика и механика. – 1972. – № 3. – С. 118–121.
7. *Гордиенко Б.А.* Динамика ортотропных цилиндрических оболочек при осевом ударе // Механика полимеров. – 1977. – № 5. – С. 892–895.
8. *Gordienko B.A.* Analysis of impact deformation of corrugated and anisotropic shells // ROŚPRAWY INŻYNIERSKIE (Engineering Transactions). – 1976. – V. 24, No 4. – P. 809–818.
9. *Шигабутдинов Ф.Г., Хамитов Т.К.* Определение критических усилий потери устойчивости упругих цилиндрических оболочек при продольном сжатии силами ударного типа // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2011. – № 2. – С. 85–92.
10. *Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф.* Распространение упругих волн от продольного удара по оболочкам переменной толщины с нулевой гауссовой кривизной срединной поверхности // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – том IV. – ч. 5. – С. 2374–2376.
11. *Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф.* Влияние несимметрично расположенных шпангоутов на поперечное волнообразование ортотропных цилиндрических оболочек конечной длины при продольном ударе // «Аналитическая механика, устойчивость и управление» труды X международной четаевской конференции, том 1 аналитическая механика. – 2012. – С. 521–528.
12. *Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов Ф.Г.* Влияние местных дефектов на волнообразование в ортотропных цилиндрических оболочках конечной длины при продольном ударе // Вестник МГСУ. – 2013. – № 10. – С. 60–67.
13. *Галимов К.З. и др.* Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. – Казань: Изд-во КГУ, 1977. – 132 с.
14. *Баженов В.Г., Чежмарев Д.Т.* Вариационно–разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек: монография. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. – 159 с.

Мухутдинов Рустем Фаритович – старший преподаватель кафедры механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета

E-mail: ktm80@yandex.ru

Шигабутдинов Феликс Галлямович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета

E-mail: shigfg@mail.ru

Summary

R.F. Mukhutdinov, F.G. Shigabutdinov.

Cross waves in orthotropic conic covers with local changes of thickness at longitudinal impact

Examines longitudinal-transverse motion of conical shells with local changes in thickness in the longitudinal blows rigid body. For analysis of the process of wave generation are geometrically nonlinear differential equation of longitudinal-transverse movements of thin orthotropic shell type Tymoshenko, taking into account the shift and the inertia of rotation. The results of the solutions presented in the form of two-dimensional and three-dimensional graphs showing the picture of the wave generation.

Key words: conical shell, cylindrical shell of variable thickness, longitudinal impact, trough, wave generation.

Мухутдинов Рустем Фаритович старший преподаватель кафедры механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета, +79047633558, ktm80@yandex.ru

Muhutdinov Rustem Faritovich senior lecturer of the Department of mechanics, Kazan State University of Architecture and Engineering, +79047633558, ktm80@yandex.ru

Шигабутдинов Феликс Галлямович кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета, +7(843)5104729, shigfg@mail.ru

Shigaboutdinov Felix Galliamovich candidate of physico-mathematical Sciences, associate Professor of the Department of mechanics, Kazan State University of Architecture and Engineering, +7(843)5104729, shigfg@mail.ru