

УДК 621.9.047; 532.528

**ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПРИ
СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ ВЫХОДА ПО ТОКУ***Н.М. Миназетдинов, Л.М. Котляр***Аннотация**

В работе получено аналитическое решение задачи об электрохимической обработке металлов полигональным катодом-инструментом, с учетом разрывной функции зависимости выхода по току от плотности тока. При используемой зависимости выхода по току на неизвестной обрабатываемой поверхности существует три области с различными законами распределения анодной плотности. В рамках принятых предположений исходная задача сводится к задаче о фиктивном течении идеальной жидкости со свободными поверхностями. Представлены результаты расчетов для различных частных случаев.

Ключевые слова: электрохимическая обработка металлов, потенциал, гидродинамическая аналогия, свободная поверхность.

1. Введение

Метод электрохимической обработки металлов является перспективным направлением в технологии машиностроения [1, 2]. Производительность и точность электрохимического формообразования существенно зависят от доли заряда η (выход по току для реакций анодного растворения металла), затраченной на растворение металла. Выход по току η зависит от различных параметров процесса и, главным образом, от анодной плотности тока j_a [1].

**2. Модель зависимости выхода по току от плотности тока тока для
нитратных и хлоратных электролитов**

В работе [3], для моделирования зависимости $\eta(j_a)$ предложена скачкообразная функция

$$\eta(j_a) = 0 \quad \text{при} \quad j_a < j_{cr}; \quad \eta(j_a) = a_0 - a_1/j_a \quad \text{при} \quad j_a \geq j_{cr}, \quad (1)$$

где $a_0 > 0, a_1 > 0$ – постоянные, учитывающие свойства электролита и обрабатываемого материала, j_{cr} – некоторая критическая плотность тока, характерная для конкретного металла или сплава при электрохимической обработке в соответствующем электролите [1]. Будем считать, что при некотором значении $j_a = j_{max}$ достигается наибольшая производительность процесса с $\eta = \eta_{max}$, а при $j_a = j_{cr}$ выполняется равенство $\eta = \eta_{cr} \geq 0$. График зависимости (1) представлен на рис.1.

Участок I соответствует рабочей зоне, в которой происходит интенсивное растворение металла при высоких значениях плотности тока. С течением времени, за счет растворения металла, на обрабатываемой поверхности образуются области, расстояние от которых до рабочей поверхности катода увеличивается, что приводит к падению анодной плотности тока и убыванию скорости растворения металла в этих областях. В рассматриваемой модели, вначале, увеличение межэлектродного расстояния приводит к уменьшению плотности тока от j_{max} до j_{cr} . Выход по току, при этом, убывает от η_{max} до η_{cr} .

На участке II происходит резкое снижение η до нуля при постоянном значении плотности тока, равном j_{cr} . При наличии на анодной границе необрабатываемых областей, им соответствует участок III, на которой плотность тока убывает от j_{cr} до нуля.

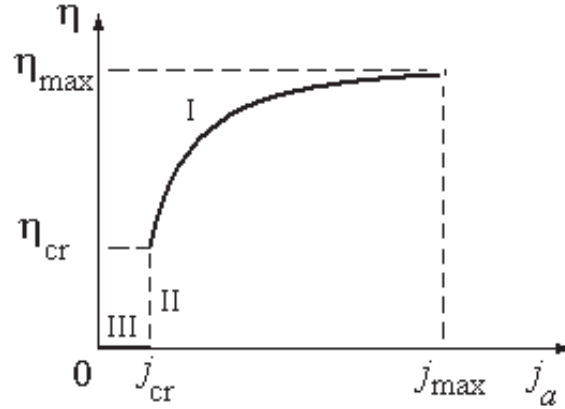


Рис. 1.

Используя равенство $\eta_{cr} = \eta(j_{cr})$, получим

$$a_1 = j_{cr}(a_0 - \eta_{cr}). \quad (2)$$

Ниже, в рамках модели идеального процесса [1], находится численно-аналитическое решение двумерной задачи теории электрохимической обработки металлов, связанное с определением установившейся формы поверхности детали при обработке прямоугольным катодом-инструментом.

Вводятся система декартовых координат (x_1, y_1) , связанная с катодом, который движется в направлении оси ординат, и комплексный потенциал электростатического поля $W_1(z_1) = v(x_1, y_1) + iu(x_1, y_1)$, $z_1 = x_1 + iy_1$ ($u(x_1, y_1)$ – потенциал поля, $v(x_1, y_1)$ – функция тока). Значения потенциалов u_a, u_c на поверхностях анода и катода постоянны.

При постановке задачи используется зависимость (1), согласно которой искомая анодная граница разделяется на три участка с различными законами распределения плотности тока.

3. Постановка задачи

Схема сечения межэлектродного промежутка для рассматриваемой задачи представлена на рис.2. Граница катода-инструмента – прямоугольный контур с осью симметрии, совпадающей с осью ординат. В силу симметрии межэлектродного промежутка ограничимся рассмотрением левой симметричной части межэлектродного промежутка. На данном участке межэлектродного промежутка: линия $DEFP$ соответствует границе катода, CD и PR линии симметрии. Электрод-инструмент описанной схемы можно применять для формообразования глубоких пазов в деталях машин, резки заготовок и других технологических процессов.

В соответствии с зависимостью (1) искомую анодную границу разделим на три области. В рабочей области I (линия BC), соответствующей участку I на графике зависимости $\eta(j_a)$, условие, определяющее установившуюся форму анодной

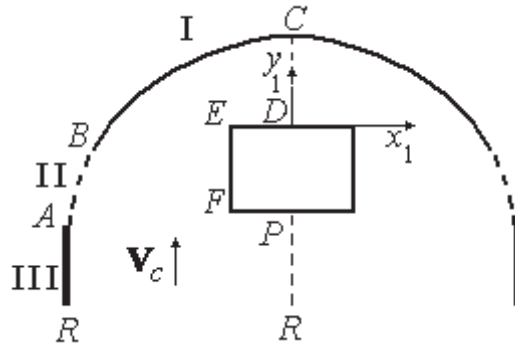


Рис. 2. Геометрия межэлектродного промежутка

границы, выражается равенством [1]

$$\eta(j_a)j_a = j_0 \cos \theta, \quad j_a = \kappa \frac{\partial u}{\partial n_1}, \quad j_0 = \frac{\rho V_c}{\varepsilon}, \quad (3)$$

где κ – удельная электропроводность среды, ρ – плотность материала анода, θ – угол между вектором скорости \mathbf{V}_c подачи катода-инструмента и вектором \mathbf{n}_1 внешней нормали к обрабатываемой поверхности. Используя формулы (1), (3) получаем распределение нормальной производной потенциала на границе анода

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{a_1 + j_0 \cos \theta}{\kappa a_0}. \quad (4)$$

Переход из участка I на участок II на графике зависимости $\eta(j_a)$ приводит к соответствующему переходу и на анодной границе из области I в область II (линия AB). На этом участке анодной границы выполняется условие

$$j_a = j_{cr}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{j_{cr}}{\kappa}. \quad (5)$$

Участку III на графике зависимости $\eta(j_a)$ соответствует участок анодной границы, моделируемый вертикальным прямолинейным участком AR; выход по току здесь равен нулю и растворение металла не происходит. Плотность тока на участке AR изменяется от j_{cr} в точке A до нуля в бесконечно удаленной точке R. Положения точек перехода A и B неизвестно и определяются в процессе решения задачи.

Введя характерную длину H и безразмерные переменные [4]

$$H = \kappa \frac{u_a - u_c}{j_0}, \quad x = \frac{x_1}{H}, \quad y = \frac{y_1}{H}, \quad n = \frac{n_1}{H}$$

представим комплексный потенциал в безразмерном виде

$$W(z) = \varphi(z) + i\psi(z), \quad z = x + iy, \quad W(z) = \frac{W_1(z) - iu_c}{u_a - u_c},$$

его мнимая часть – функция $\psi(z)$ в области межэлектродного промежутка является гармонической и удовлетворяет следующим условиям: $\psi = 0$ – на границе катода DEFP; $\psi = 1$ – на границе анода RABC.

Скорость перемещения точек границы BC определяется законом (4), который в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = b(a + \cos \theta), \quad b = \frac{1}{a_0}, \quad a = \frac{a_1}{j_0}. \quad (6)$$

На участке AB , согласно условию (5), выполняется равенство

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = c, \quad c = \frac{j_{cr}}{j_0}. \quad (7)$$

В гидродинамической интерпретации модели электрического поля условия (6) и (7) определяют годограф скорости фиктивного течения идеальной несжимаемой жидкости на неизвестных участках анодной границы [4]. На участке BC выполняется условие

$$V = b(a + \cos \theta), \quad (8)$$

где θ – аргумент вектора скорости. На участке AB модуль скорости постоянная величина

$$V = c, \quad (9)$$

Гидродинамическим аналогом исходной задачи является задача теории струй идеальной жидкости [5] об определении свободных границ BC и AB с заданными на них условиями (8) и (9), соответственно. Поток создается системой непрерывно распределенных источников вдоль линии PR и стоков на линии D .

4. Численно-аналитическое решение задачи

Для решения задачи введем вспомогательную комплексную переменную $t = \xi + i\delta$, изменяющуюся в области G_t ($|t| < 1$, $\xi > 0$, $\delta > 0$) (рис. 3), и найдем функцию $z(t)$, конформно отображающую область G_t на область течения. Соответствующие точки на рис.2 и рис.3 обозначены одинаковыми буквами.

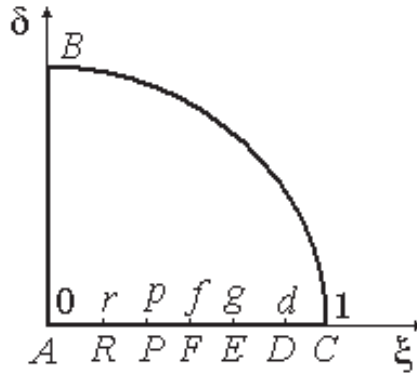


Рис. 3. Параметрические плоскости

Комплексный потенциал $W(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, удовлетворяет граничным условиям

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi/2]; \\ 0, & t = i\delta, \quad \delta \in [0, 1]; \\ 0, & t = \xi, \quad \xi \in [0, r], \\ 0, & t = \xi, \quad \xi \in [p, d]. \end{cases}$$

На линиях симметрии CD и PR функция $\varphi(t)$ принимает постоянные значения. Не нарушая общности, будем считать, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \xi \in [r, p], \\ \varphi_0, & \xi \in [d, 1]. \end{cases}$$

Постоянная величина φ_0 определяет величину электрического тока, протекающего через анодную границу. Областью изменения комплексного потенциала является прямоугольник, со сторонами равными единице и φ_0 .

Используя метод конформных отображений, найдем производную комплексного потенциала и параметр φ_0 :

$$\frac{dW}{dt} = N \frac{F(t)}{\sqrt{t^2 - d^2}}, \quad N = \frac{i}{I_0}, \quad I_0 = \int_d^1 \frac{F(x)}{\sqrt{x^2 - d^2}} dx, \quad \varphi_0 = \frac{1}{I_0} \int_p^d \frac{F(x)}{\sqrt{d^2 - x^2}} dx, \quad (10)$$

где

$$F(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{(x^2 - r^2)(1 - x^2 r^2)(x^2 - p^2)(1 - x^2 p^2)(1 - x^2 d^2)}}.$$

Введем функцию Жуковского [5]

$$\chi(t) = \ln \left(\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right) = r - i\theta, \quad r = \ln \frac{V}{V_0}, \quad V_0 = c, \quad (11)$$

и представим ее в виде суммы

$$\chi(t) = \chi_*(t) + \omega(t), \quad (12)$$

Функция Жуковского $\chi_*(t) = r_* - i\theta_*(t)$, $r_* = \ln(V_*/V_0)$ соответствует течению по заданной схеме с условием $V_* = V_0$ на участке BC границы анода, а функция $\omega(t)$, аналитическая в области G_t и непрерывна вплоть до ее границ.

На границе области G_t функции $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\operatorname{Re} \chi(i\delta) = \operatorname{Re} \chi_*(i\delta) = 0, \quad \delta \in [0, 1] \quad (13)$$

$$\operatorname{Im} \chi(\xi) = \operatorname{Im} \chi_*(\xi) = \begin{cases} -\pi/2, & \xi \in [0, r) \cup (f, g), \\ -\pi, & \xi \in (r, f), \\ 0, & \xi \in (g, 1]. \end{cases} \quad (14)$$

$$\operatorname{Re} \chi_*(t) = 0, \quad t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi/2]. \quad (15)$$

Используя формулу (11), условие (8) на неизвестной анодной границе представим в виде

$$b(a + \cos \theta(t)) = V_0 \exp(r(t)), \quad t = \exp(i\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi/2], \quad r(i) = 0. \quad (16)$$

Из условия (16), следует

$$\theta_B = \theta(i) = \arccos(V_0/b - a). \quad (17)$$

В точке A выполняется условие гладкого отрыва [5]

$$\theta'(\delta) = 0 \quad \text{при} \quad \delta = 0. \quad (18)$$

Используя метод особых точек Чаплыгина [5], получим

$$\chi_*(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{(t-r)(1+tr)(t+f)(1-tf)(t+g)(1-tg)}{(t+r)(1-tr)(t-f)(1+tf)(t-g)(1+tg)}. \quad (19)$$

Из сравнения граничных условий функции $\chi(t)$ и $\chi_*(t)$ для функции $\omega(t)$ получим нелинейную краевую задачу

$$\operatorname{Re} \omega(i\delta) = 0, \quad \delta \in [0, 1]; \quad \operatorname{Im} \omega(\xi) = 0, \quad \xi \in [0, 1], \quad (20)$$

$$b(a + \cos \theta(T + \mu)) = V_0 \exp(\lambda), \quad (21)$$

где $T = \operatorname{Im} \chi_*(\exp(i\sigma))$, $\mu = \operatorname{Im} \omega(\exp(i\sigma))$, $\lambda = \operatorname{Re} \omega(\exp(i\sigma))$, $\sigma \in [0, \pi/2]$.

В плоскости комплексной переменной t функцию $\omega(t)$ можно аналитически продолжить на весь круг $|t| \leq 1$ и представить в виде степенного ряда с вещественными коэффициентами

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} t^{2n-1}. \quad (22)$$

Выбранная в таком виде функция $\omega(t)$, удовлетворяет граничным условиям (20).

Используя формулы (11), (19) и (22) получим

$$\theta(\delta) = \frac{\pi}{2} - F_1(\delta, r) + F_1(\delta, f) + F_1(\delta, g) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{2n-1} \delta^{2n-1}. \quad (23)$$

где $F_1(x, y) = \operatorname{arctg}(xy) - \operatorname{arctg}(x/y)$. Используя формулу (23), представим выражение (17) в виде

$$\sin \left(-F_1(1, r) + F_1(1, f) + F_1(1, g) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{2n-1} \right) = a - \frac{V_0}{b}. \quad (24)$$

Дифференцируя выражение (23), получим

$$\theta'(\delta) = -F_2(\delta, r) + F_2(\delta, f) + F_2(\delta, g) - b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b_{2n-1} (2n-1) \delta^{2n-2}, \quad (25)$$

где $F_2(x, y) = y/(1+x^2y^2) - y/(x^2+y^2)$. Учитывая равенство (25) представим условие (18) в виде

$$-F_2(0, r) + F_2(0, f) + F_2(0, g) - b_1 = 0,$$

и сведем к квадратному уравнению

$$r^2 + 2Br - 1 = 0, \quad B = (b_1 + 1/f - f + 1/g - g)/2,$$

из которого следует, что

$$r = -B + \sqrt{B^2 + 1}. \quad (26)$$

Геометрические характеристики течения определяются из параметрической зависимости

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\exp(-\chi(t)) dW}{V_0} \frac{dW}{dt} = \frac{i}{V_0 I_0(t-r)} \sqrt{\frac{(t-f)(t-g)}{(t-p)(t-d)}} F_3(t) \exp(-\omega(t)), \quad (27)$$

где

$$F_3(t) = \frac{t(t^2 + 1)}{1 + tr} \sqrt{\frac{(1 + tf)(1 + tg)}{(t + f)(1 - tf)(t + g)(1 - tg)(t + p)(1 - t^2p^2)(t + d)(1 - t^2d^2)}}.$$

Интегрированием равенства (27) по полуокружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $t = r$ с помощью теории вычетов найдем расстояние между линиями AR и PR

$$h = \frac{\pi}{V_0 I_0} \sqrt{\frac{(f - r)(g - r)}{(p - r)(d - r)}} F_3(r) \exp(-\omega(r)).$$

Интегрируя выражение (27) на отрезках $[p, f]$, $[f, g]$ и $[g, d]$, найдем, соответственно, длины L_1 , L_2 , L_3 отрезков PF , FE , ED

$$L_1 = L_1(d, f, g, p, r), \quad L_2 = L_2(d, f, g, p, r), \quad L_3 = L_3(d, f, g, p, r); \quad L_1 = L_3. \quad (28)$$

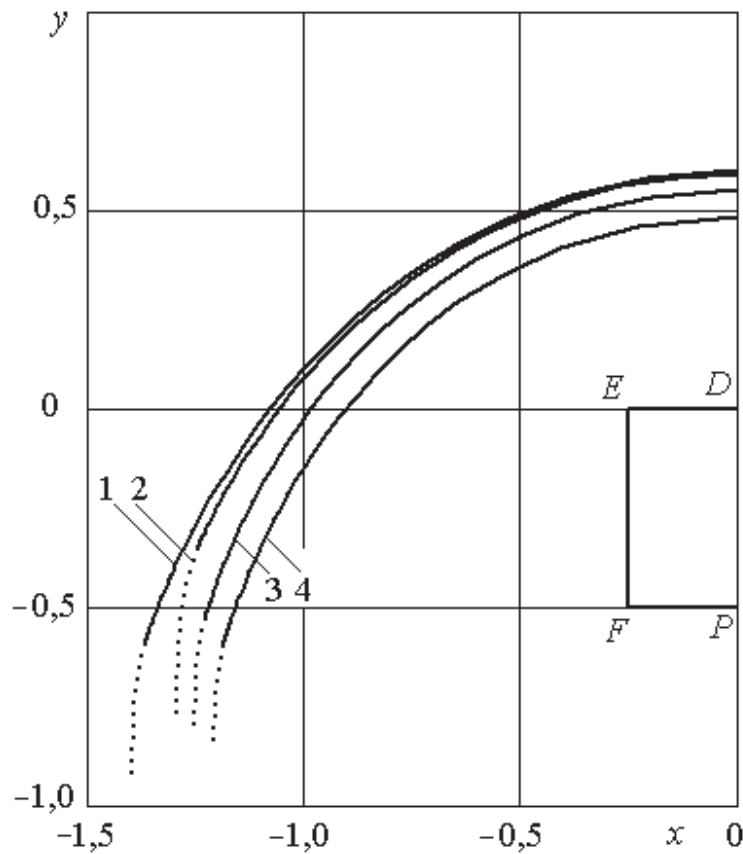


Рис. 4. Результаты расчета анодных границ

Для численного решения задачи задаются геометрические величины L_1 , L_2 , L_3 , характерная и критическая плотности тока j_0 , j_{cr} , коэффициент a_0 . Значение коэффициента a_1 находится с помощью формулы (2). Коэффициенты разложения (22) определяются методом коллокаций из уравнения (21). Система уравнений, для

вычисления коэффициентов разложения (22) решается методом Ньютона совместно с уравнениями (24), (26), (28), предназначенных для определения параметров d, f, g, p, r .

Для численного решения задачи рассмотрен случай, когда

$$L_1 = 0,25, L_2 = 0,5, L_3 = 0,25, j_0 = 100 \text{ А/см}^2 \quad (29)$$

При $a_0 = 0,9$ и $\eta_{cr} = 0,7$ выполнены расчеты для двух значений критической плотности тока j_{cr} , равных 40 и 50 А/см². На рис. 4 представлены результаты расчета анодных границ для указанных случаев (графики 1, 2). Участок BC анодной границы, на которой выполняется условие (8) отмечен сплошной линией, штриховкой - переходной участок AB , на которой выполняется условие (9). Затем при тех же значениях параметров (29) выполнены расчеты анодной границы при $a_0 = 0,9$, $j_{cr} = 50 \text{ А/см}^2$, $\eta_{cr} = 0,5$ (рис.4, график 3) и $a_0 = 0,7$, $j_{cr} = 50 \text{ А/см}^2$, $\eta_{cr} = 0,5$ (рис.4, график 4).

Из представленных результатов видно, что при возрастании критической плотности тока j_{cr} расстояние h уменьшается. При больших значениях j_{cr} достигается более высокая степень локализации процесса растворения металла. Уменьшение η_{cr} и параметра a_0 приводит к снижению производительности процесса.

Summary

N.M. Minazetdinov, L.M. Kotlyar. Electrochemical shaping with stepped current efficiency function.

In this paper the analytical solution of the problem of electrochemical machining of metals with polygonal cathode taking into account discontinuous current efficiency function has been deduced. It has been found that with such current efficiency function there are three areas with different current distribution functions on unknown surface. Within the scope of the assumptions made, the original problem is reduced to the problem of a fictitious flow of an ideal fluid with free surfaces. Calculation results for different particular problems are presented.

Key words: electrochemical machining of metals, potential, hydrodynamic analogy, free surface

Литература

1. *Давыдов А.Д., Козак Е.* Высокоскоростное электрохимическое формообразование. – М.: Наука, 1994. – 272 с.
2. *Житников В.П., Зайцев А.Н.* Импульсная электрохимическая размерная обработка. – М.: Машиностроение, 2008. – 413 с.
3. *Миназетдинов Н.М.* Об одной задаче электрохимической обработки металлов с учетом переменности выхода по току для реакций анодного формообразования // Вестник УГАТУ. – 2012. – Т. 16, No 5(50). – С. 154–159.
4. *Клоков В.В.* Электрохимическое формообразование. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 80 с.
5. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1977. – 536 с.

Сведения о каждом из авторов статьи

Котляр Леонид Михайлович – доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры математики Набережночелнинского института (филиала) К(П)ФУ.

E-mail: leonid-kotlyar@mail.ru

Миназетдинов Наиль Миргазиянович – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математики Набережночелнинского института (филиала) К(П)ФУ.

E-mail: nminazetdinov@mail.ru