

УДК 532.5.031

**РАСШИРЕНИЕ - СЖАТИЕ СФЕРОИДАЛЬНОГО  
КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА У ТВЕРДОЙ СТЕНКИ***Л.А.Косолапова, В.Г. Малахов***Аннотация**

Изучается динамика газового пузырька вблизи твердой стенки под действием разности давлений внутри пузырька и в окружающей жидкости. Жидкость невязкая несжимаемая, ее течение потенциальное. Предполагается, что в начальный момент времени давление в пузырьке больше, чем давление в жидкости. В расчетах применяется алгоритм, основанный на схеме Эйлера и методе граничных элементов. Исследуются влияние сфероидальных возмущений начальной формы пузырька и расстояния от пузырька до стенки на динамику системы пузырек-жидкость.

**Ключевые слова:** Кавитационный пузырек, потенциальное течение жидкости, метод граничных элементов.

**1. Введение**

Изучение схлопывания пузырьков в жидкости около стенки является важной частью исследований кавитационного разрушения. Решение задачи о схлопывании пузырька вблизи стенки позволяет определить скорость и форму кумулятивной струи, возникающей при коллапсе пузырька на его поверхности и являющейся одной из причин эрозии твердых тел. Важными факторами, определяющими динамику пузырька у стенки, являются его форма и расстояние до стенки в начале схлопывания. Влияние расстояния до стенки для первоначально сферического пузырька рассматривается, в частности, в работах [1 - 4], а исследование влияния начальных отклонений формы от сферической - в [5, 6]. В [5] отмечено существенное влияние начальной несферичности на скорость струи и характер схлопывания. В ряде работ, посвященных динамике пузырька у стенки, наряду со стадией сжатия рассматривается и предшествующая ей стадия расширения (например, [2, 3, 7]). В [7] отмечена важность учета фазы расширения, когда любое возмущение сферической формы во время расширения как и любой источник асимметрии в области течения могут иметь большое влияние на процесс схлопывания.

Широко используемым в исследовании динамики пузырька у стенки является подход, основанный на методе граничных элементов (МГЭ) и впервые приведенный в [8]. В дальнейшем он получил развитие в работах [1, 2, 7] и др.

В настоящей работе алгоритм, использующий метод Эйлера для отслеживания движения поверхности пузырька и коррекции потенциала скорости жидкости на нем и МГЭ [9], применяется для изучения расширения - сжатия газового пузырька, находящегося в идеальной несжимаемой жидкости вблизи твердой стенки. Изучено влияние отклонений формы пузырька от сферической и расстояния от центра пузырька до стенки на динамику системы пузырек - жидкость. Для полноты физической картины построены изолинии поля давления окружающей жидкости.

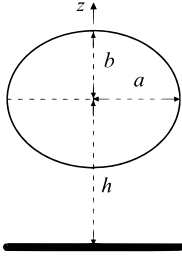


Рис. 1.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается расширение-сжатие кавитационного пузырька в жидкости вблизи плоской жесткой стенки. Поверхность пузырька в начальный момент времени представляет собой сфероид с осью симметрии  $z$  (рис.1). Начальная несферичность пузырька характеризуется отношением полуосей  $e=b/a$ . Начальный объем пузырька равен объему сферы радиуса  $R_0$ . Давление на «бесконечности»  $p_\infty$  постоянно. Давление газа в пузырьке  $p_b^0$  в начале расширения больше давления окружающей жидкости  $p_\infty$ . Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая, ее движение потенциальное и описывается уравнениями

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p - p_\infty}{\rho_f} = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi$  - потенциал скорости,  $t$  - время,  $p$ ,  $p_\infty$  - давление в жидкости и «на бесконечности»,  $\rho_f$  - плотность жидкости. Давление в пузырьке определяется из уравнения состояния совершенного газа

$$p^- = p_b^0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma. \quad (2)$$

Здесь  $V_0, V$  - начальный и текущий объемы пузырька,  $\gamma$  - показатель адиабаты.

На поверхности пузырьков выполняются динамическое и кинематическое условия

$$p^+ = p^- - 2\sigma H, \quad d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}, \quad (3)$$

где  $p^+$ ,  $p^-$  - давление со стороны жидкости и газа в пузырьке,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения,  $H$  - средняя кривизна,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  - радиус-вектор и скорость точки поверхности ( $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ).

На жесткой стенке ставится условие непротекания

$$\partial\Phi/\partial z = 0. \quad (4)$$

Потенциал скорости  $\Phi$  и его нормальная производная  $\partial\Phi/\partial n$  на поверхности пузырька связаны граничным интегральным уравнением (ГИУ), которое для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат имеет вид [9]

$$c(\rho, z)\Phi(\rho, z) = \int_S \{ \psi(\rho_0, z_0) K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) - \Phi(\rho_0, z_0) K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) \} ds_0, \quad (5)$$

где

$$\psi(\rho_0, z_0) = \partial\Phi(\rho_0, z_0)/\partial n_0, \quad K_1(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{\rho_0}{\pi} \left( \frac{K(m)}{A} + \frac{K(m_2)}{A_2} \right),$$

$$K_2(\rho_0, z_0, \rho, z, t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{E(m) - K(m)}{A} + \frac{E(m_2) - K(m_2)}{A_2} \right) \frac{dz_0}{ds_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_0}{d^2} \left( (\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} - (z - z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \frac{E(m)}{A} + \frac{\rho_0}{d^2} \left( (\rho - \rho_0) \frac{dz_0}{ds_0} + (z + z_0) \frac{d\rho_0}{ds_0} \right) \frac{E(m_2)}{A_2} \right],$$

$$A^2 = (\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad A_2^2 = (\rho + \rho_0)^2 + (z + z_0)^2,$$

$$d^2 = (\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad d_2^2 = (\rho - \rho_0)^2 + (z + z_0)^2, \\ m^2 = 4\rho\rho_0/A^2, \quad m_2^2 = 4\rho\rho_0/A_2^2,$$

$(\rho, \varphi, z), (\rho_0, \varphi, z_0)$  - координаты точек наблюдения и интегрирования,  $s_0$  - дуговая координата контура образующей поверхности пузырька,  $K(m), E(m)$  - полные эллиптические интегралы 1 и 2 рода, коэффициент  $c(\rho, z)$  можно принять равным 0.5 при условии гладкости поверхности пузырька.

### 3. Динамика сфероидального кавитационного пузырька в воде у твердой стенки

Изучается динамика сфероидального пузырька в воде при комнатных условиях вблизи твердой стенки. В начальный момент времени  $t_0$  все точки поверхности пузырька имеют нулевую начальную скорость, а давление в пузырьке задается большим, чем давление окружающей жидкости. В момент достижения максимального объема  $t_1$  давление в пузырьке становится меньше давления окружающей жидкости и пузырек начинает схлопываться, как правило, с образованием кумулятивной струи. Расчет продолжается до момента  $t_c$  соприкосновения между собой частей поверхности пузырька, в частности, до момента контакта конца струи с противоположной стороной поверхности пузырька. Для сфероидальной начальной формы принимается, что объем пузырька равен объему сферы радиуса  $R_0$ .

Введем параметр  $R_m$  - максимальный радиус сферического пузырька, который достигается при заданной первоначальной положительной разнице давлений  $p_b^0 - p_\infty$  в безграничном объеме жидкости (т.е. без стенки). Величину  $R_m$  можно оценить по приближенной формуле, следующей из уравнения Рэлея-Плессета в предположении  $R_0/R_m \ll 1$

$$\frac{p_b^0}{(\gamma - 1)p_\infty} = \left(\frac{R_m}{R_0}\right)^3.$$

Исследовано влияние на эволюцию пузырька его начальной формы, характеризуемой параметром  $e$ , в зависимости от безразмерного начального расстояния  $d = h/R_0$  между пузырьком и стенкой и величины  $\chi = R_m/R_0$ , характеризующей максимальное расширение пузырька. Для расчетов взяты следующие исходные данные

$$R_0 = 10^{-4} \text{ м}, \quad e = 0.5, 1, 2; \quad d = 2, 4, 6, 12; \quad \gamma = 1.4, \quad \sigma = 0, \\ \rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad p_\infty = 0.1 \text{ МПа}$$

На рис.2 изображены формы пузырька в 3 последовательных момента времени для трех значений  $e$  в зависимости от расстояния до стенки  $d$  при  $\chi = 6.3$ . Видно, что во всех приведенных вариантах наблюдается возникновение кумулятивной струи: у сплюсненного пузырька ( $e = 0.5$ ) она более тонкая, а у вытянутого ( $e = 2$ ) - более широкая. При этом форма пузырька в момент  $t_c$  заметно меняется в зависимости от его расстояния до стенки. Таким образом для  $\chi = 6.3$  и  $2 < d < 6$  на конечную форму пузырька оказывает влияние как его начальная несферичность так и наличие стенки.

При большем значении  $\chi$  и  $d \sim \chi$  влияние начальной формы пузырька на его форму в момент  $t_c$  заметно уменьшается и он сжимается как сферический пузырек у стенки. На рис.3 приведены формы пузырька в момент максимального расширения  $t_1$  и в момент  $t_c$  для  $e = 0.5, 1, 2$  при  $d = 12$  и  $\chi = 12.6$ . Видно, что для

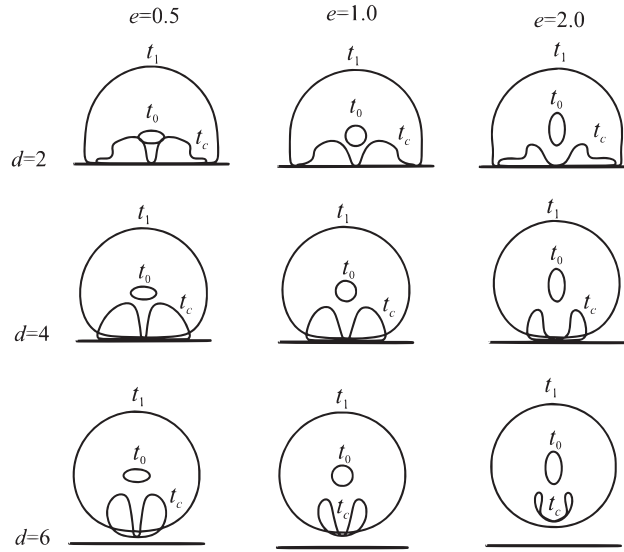


Рис. 2. Формы пузырька в три момента времени  $t_0, t_1, t_c$  для  $e=0.5, 1, 2$  и  $d = 2, 4, 6$  при  $\chi=6.3$

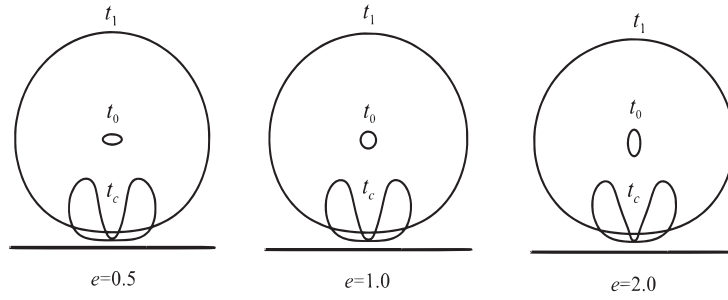


Рис. 3. Формы пузырька в три момента времени для  $e=0.5, 1, 2$ ;  $d = 12$ ,  $\chi=12.6$

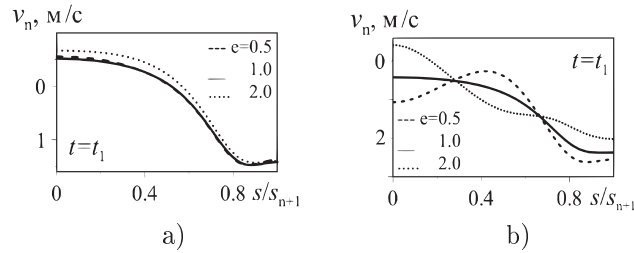


Рис. 4. Нормальная скорость  $v_n$  на контуре пузырька в момент его максимального расширения для  $e=0.5, 1, 2$ : а -  $d=12$ ,  $\chi=12.6$ ; б -  $d=6$ ,  $\chi=6.3$

рассмотренных значений  $e$  формы как в момент  $t_1$ , так и в момент  $t_c$  отличаются незначительно, в то время как для случая  $d=6$ , представленного на рис.2, формы пузырьков в момент  $t_c$  заметно различны.

На рис.4 изображена нормальная скорость  $v_n$  на контуре пузырька в момент  $t_1$  при  $e=0.5, 1, 2$  для  $d=12$ ,  $\chi=12.6$  (рис.4а) и  $d=6$ ,  $\chi=6.3$ , (рис.4б). Видно, что при  $\chi=12.6$  для разных  $e$   $v_n$  почти совпадает, а при  $\chi=6.3$  заметно различается,

что и определяет разные формы пузырька в момент схлопывания  $t_c$ .

Одной из важных характеристик кумулятивной струи является скорость ее конца  $v_{z0}$ , которая в зависимости от  $e$  и  $d$  в момент  $t_c$  для  $\chi = 6.3$  дана в таблице. Видно, что скорость растет с уменьшением  $e$  и увеличением расстояния до стенки  $d$ , но не превышает 110 м/с.

Таблица. Скорость  $v_{z0}$ , м/с, конца струи в момент  $t_c$ .

$e \backslash d$	3	4	5	6
0.5	90.85	99.35	104.79	109.41
1.0	72.59	77.46	81.22	84.85
2.0	58.42	64.73	70.72	76.24

Для оценки разрушающего воздействия струи были построены поля давления жидкости, окружающей пузырек, в момент  $t_c$  для  $e=0.5, 1, 2$  и  $d=4, 6$ . Из рис.4, где изображены изолинии этого давления, видно, что максимальное давление возникает в вершине струи, возрастает с увеличением ширины струи и не превышает 35 бар.

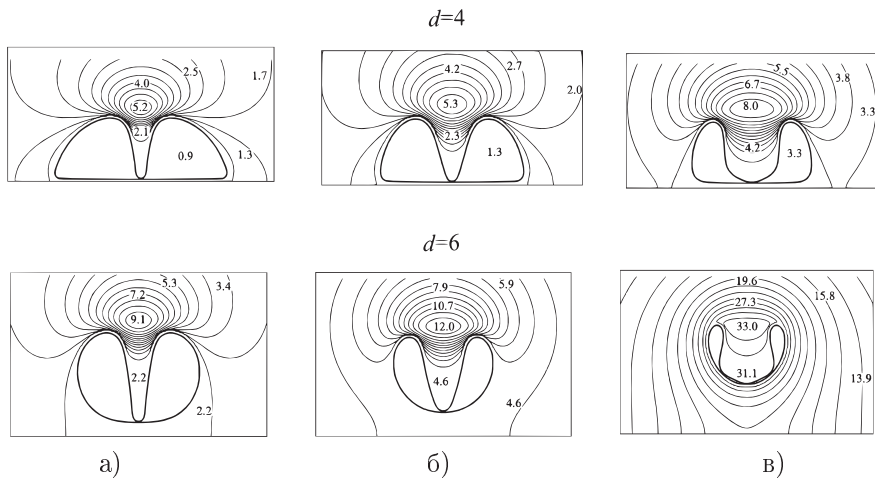


Рис. 5. Изолинии давления (бар) в момент  $t_c$  при  $d = 4, 6$  для  $e=0.5$  (а),  $e=1$  (б) и  $e=2$  (в).

#### 4. Заключение

Изучена эволюция газового пузырька вблизи твердой стенки под действием разности давлений внутри пузырька и в окружающей жидкости. Предполагается, что в начальный момент времени давление в пузырьке больше, чем давление в жидкости. Жидкость невязкая несжимаемая, ее течение потенциальное. В расчетах применяется алгоритм, основанный на схеме Эйлера и методе граничных элементов. Исследовано влияние на динамику системы пузырек-жидкость формы пузырька и его расстояния до стенки в начальный момент времени. Показано, что при максимальном размере пузырька порядка расстояния от пузырька до стенки влияние начальной формы на процесс схлопывания уменьшается с увеличением его максимального расширения.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ грант № 14-01-97004 р поволжье а.

### Summary

*L.A. Kosolapova, V.G. Malakhov* Expansion - compression of the spheroidal cavitation bubble near a rigid wall

The process of collapse of a gas bubble near a rigid wall under the action of the difference of the pressure inside the bubble and the surrounding liquid is considered. The liquid is incompressible, its flow being potential. It is assumed that at the initial time the pressure in the bubble is higher than the pressure in the liquid. An algorithm based on the Euler scheme and the boundary element method is used. Influence of spheroidal perturbations of the initial shape of the bubble and the distance between the bubble and the wall on the dynamics of the system bubble - liquid is examined.

**Key words:** Cavitation bubble, cumulative jet, potential fluid flow, boundary element method

### Литература

1. *Taib B.B.* Boundary integral method applied to cavitation bubble dynamics // PhD thesis. The University of Wollongong, Australia – 1985. - 108pp.
2. *Blake J.R., Taib B.B., Doherty G.* Transient cavities near boundaries // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 170. –P. 479-497.
3. *Shervani-Tabar M.T.* Computer study of a cavity bubble near a rigid boundary, a free surface and a compliant wall // PhD Thesis, University of Wollongong. Wollongong. Australia. – 1995.
4. *Zhang Z. Y., Zhang H. S.* Surface tension effects on the behavior of a cavity growing, collapsing and rebounding near a rigid wall // Physical Review E. - 2004. - V.70. - 056310.
5. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струи // ДАН СССР. - 1976. - Т. 227, № 1. - С. 63-66.
6. *Longuet-Higgins M.S. and Oguz H.N.* Critical jets in surface waves and collapsing cavities //Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. – 1997. - V.355. - P.625-639.
7. *Pearson A., Blake J.R. Otto S.R.* Jets in bubbles // J. Engineering Mathematics. - 2004. – V.48. – P. 391-412.
8. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // ДАН СССР. - 1975. - Т. 221, № 3. - С. 559-562.
9. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Схлопывание кавитационного пузырька в жидкости вблизи твердой стенки // Вестник Башкирского университета. - 2013. - Т. 18, вып. 1. - С. 15-21.

---

Сведения об авторах статьи:

**Косолапова Людмила Александровна** – канд. физ.-мат. н., с.н.с., с.н.с. ИММ КазНИЦ РАН.

E-mail: [kosolapova@kfti.knc.ru](mailto:kosolapova@kfti.knc.ru)

**Малахов Владимир Георгиевич** – канд. физ.-мат. н., с.н.с., с.н.с. ИММ КазНИЦ РАН.

E-mail: [malahov@kfti.knc.ru](mailto:malahov@kfti.knc.ru)