

УДК 539.3

**РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ОСЕСИММЕТРИЧНО  
НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА  
ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ***Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев***Аннотация**

Расчет оболочки из нелинейно упругого изотропного материала осуществляется шаговым методом нагружения. Оболочка рассматривается в трех состояниях: исходном, деформированном после  $j$  шагов нагружения и соседнем, близком к деформированному, в результате  $(j + 1)$  – го шага нагружения. Деформации определены как полуразности компонент метрических тензоров. Соотношения между напряжениями и деформациями, приращениями напряжений и приращениями деформаций получены на основе гипотез о пропорциональности компонент девиаторов напряжений и деформаций и компонент девиаторов приращений напряжений и приращений деформаций. На основе полученного ранее смешанного функционала сформирована на шаге нагружения матрица деформирования объемного кольцевого конечного элемента с четырехугольным поперечным сечением. Приводится пример расчета.

**Ключевые слова:** векторная аппроксимация, тензорная аппроксимация, векторное поле, тензорное поле, смешанная формулировка, вариационный принцип.

**1. Введение**

Теория нелинейного анализа оболочечных конструкций на сегодняшний день разработана достаточно полно [1-5]. Аналитические решения дифференциальных уравнений достигаются лишь в некоторых частных случаях, поэтому весьма важным и актуальным является получение численного решения. Самым распространенным среди численных методов является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий проведение расчетов прочности конструкций при любых жесткостных свойствах материала, законах изменения внешних нагрузок и различных видах закрепления.

МКЭ в расчетах оболочек используется в различных формулировках. В формулировке метода перемещений [6-12] (неизвестными являются перемещения и их производные) разработано наибольшее количество конечных элементов, именно эти элементы используются в известных программных продуктах. При расчетах оболочек в криволинейных системах координат имеет место проблема учета смещения конечного элемента как твердого тела. В [6] отмечается возможность учета такого смещения на основе разложения вектора перемещений по ортам глобальной декартовой системы. В [8] для расчета оболочек в криволинейной системе координат в двумерной постановке предлагается решение проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела на основе аппроксимации перемещений как векторных полей. В конечных элементах в формулировке метода перемещений удовлетворяется условие гладкости класса  $C^{(0)}$  (класс непрерывных функций) и не удовлетворяется требование гладкости класса  $C^{(1)}$  (непрерывные первые производные). Поэтому весьма предпочтительными при необходимости удовлетворения требования гладкости класса  $C^{(1)}$  являются конечные элементы в смешанной формулировке [12-14] (неизвестными являются перемещения и деформации).

Проблема учета смещения конечного элемента как твердого тела в криволинейной системе координат имеет место и при реализации смешанного МКЭ.

В представленной работе решение этой проблемы предлагается с использованием аппроксимации искомых величин как векторно-тензорных полей.

## 2. Геометрия оболочки вращения

Срединная линия  $s$  оболочки вращения в декартовой системе координат  $xOz$  задается радиусом-вектором произвольной точки  $M^0$  (рис. 1)

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + z(x)\vec{k}, \quad (1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовой системы координат.

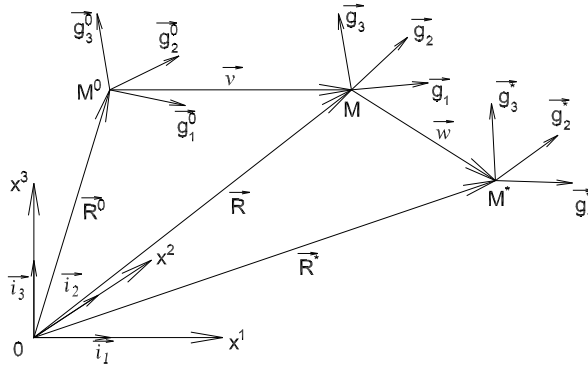


Рис. 1. Базисные векторы произвольной точки оболочки в различных состояниях

Базисные векторы точки  $M^0$  определяются выражениями

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,s}^0 = x_{,s}\vec{i} + z_{,s}\vec{k}; \quad \vec{a}_3^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{j} = -z_{,s}\vec{i} + x_{,s}\vec{k}, \quad (2)$$

где  $s$  – координата точки  $M^0$  вдоль срединной линии.

Рассматривая точку  $M^0$  (рис. 1), отстоящую на расстоянии  $t$  от точки  $M^0$ , определим ее радиус – вектор в виде

$$\vec{R}^{0t} = \vec{R}^0 + t\vec{a}_3^0. \quad (3)$$

Базисные векторы точки  $M^{0t}$  определяются дифференцированием (3) в матричном виде

$$\{\vec{g}^0\}_{2 \times 1} = [m] \{\vec{i}\}_{2 \times 2} \{i\}_{2 \times 1}; \quad \{i\}_{2 \times 1} = [m]^{-1} \{\vec{g}^0\}_{2 \times 1}, \quad (4)$$

где  $\{\vec{g}^0\}_{1 \times 2}^T = \{\vec{g}_1^0 \vec{g}_3^0\}$ .

Производные базисных векторов точки  $M^{0t}$  (2) с учетом (4) можно выразить через базисные векторы этой же точки в матричном виде

$$\{\vec{g}_{,s}^0\}_{2 \times 1} = [m^t] \{\vec{g}^0\}_{2 \times 2} \{i\}_{2 \times 1}; \quad \{\vec{g}_{,t}^0\}_{2 \times 1} = [n^t] \{\vec{g}^0\}_{2 \times 2} \{i\}_{2 \times 1}. \quad (5)$$

### 3. Перемещения и деформации

При реализации шагового нагружения процесс деформирования представляется последовательностью трех равновесных состояний оболочки, каждое из которых характеризуется положением ее произвольной точки: исходное  $M^{0t}$ ; деформированное после  $j$  шагов нагружения  $M^t$  (вектор перемещения  $\vec{V}$ ) и соседнее, близкое к деформированному, в результате  $(j+1)$ -го шага нагружения  $M^{0t^*}$  (вектор перемещения  $\vec{w}$ ) (рис. 1).

Суммарный вектор перемещения за  $j$  шагов нагружения точки  $M^{0t}$  определяется компонентами в ее локальном базисе

$$\vec{V} = \{\bar{g}^0\}_{1 \times 2}^T \{v\}_{2 \times 1}, \quad (6)$$

где  $\{v\}_{1 \times 2}^T = \{v^1 \ v^3\}$ .

Производные вектора  $\vec{V}$  определяются дифференцированием (6) и записываются выражениями

$$\vec{V}_{,s} = f_1^1 \bar{g}_1^0 + f_3^3 \bar{g}_3^0; \quad \vec{V}_{,t} = f_3^1 \bar{g}_1^0 + f_3^3 \bar{g}_3^0, \quad (7)$$

где  $f_1^1, f_1^3, f_3^1, f_3^3$  – функции компонент вектора  $\vec{V}$  и их производных.

В деформированном состоянии оболочки определяется положение точки  $M^t$  радиусом-вектором в виде

$$\vec{R}^t = \vec{R}^{0t} + \vec{V}. \quad (8)$$

Базисные векторы точки  $M^t$  записываются в базисе точки  $M^{0t}$

$$\vec{g}_1 = \vec{R}_{,s}^t = \bar{g}_1^0 (1 + f_1^1) + \bar{g}_3^0 f_3^1; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}_{,t}^t = \bar{g}_1^0 f_1^3 + \bar{g}_3^0 (1 + f_3^3). \quad (9)$$

В результате деформирования на  $(j+1)$ -ом шаге нагружения вектор перемещения  $\vec{w}$  определяется компонентами в локальном базисе  $M^{0t}$  в виде

$$\vec{w} = \{\bar{g}^0\}_{1 \times 2}^T \{w\}_{2 \times 1}, \quad (10)$$

где  $\{w\}_{1 \times 2}^T = \{w^1 \ w^3\}$ .

Производные вектора (10) имеют вид

$$\vec{w}_{,s} = \alpha_1^1 \bar{g}_1^0 + \alpha_1^3 \bar{g}_3^0; \quad \vec{w}_{,t} = \alpha_3^1 \bar{g}_1^0 + \alpha_3^3 \bar{g}_3^0, \quad (11)$$

где  $\alpha_1^1, \alpha_1^3, \alpha_3^1, \alpha_3^3$  – функции компонент вектора  $\vec{w}$  и их производных.

На  $(j+1)$ -ом шаге нагружения положение точки  $M^{t^*}$  определяется радиусом-вектором в виде

$$\vec{R}^{t^*} = \vec{R}^t + \vec{w}. \quad (12)$$

Базисные векторы точки  $M^{t^*}$  определяются дифференцированием (12)

$$\vec{g}_1^* = \vec{g}_1 + \vec{w}_{,s}; \quad \vec{g}_3^* = \vec{g}_3 + \vec{w}_{,t}. \quad (13)$$

Приращения деформаций в результате  $(j+1)$ -го шага нагружения определяются как полуразности метрических тензоров соотношениями [15]

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= (g_{ij}^* - g_{ij}) / 2 = (\vec{g}_i \cdot \vec{w}_{,j} + \vec{g}_j \cdot \vec{w}_{,i} + \vec{w}_{,j} \cdot \vec{w}_{,i}) / 2 = \\ &= \Delta \varepsilon_{ij}^I + \Delta \varepsilon_{ij}^H; \quad i, j = 1, 3. \end{aligned} \quad (14)$$

Линейная и нелинейная части приращений деформаций  $\varepsilon_{ij}^{\text{Л}}$  и  $\varepsilon_{ij}^{\text{Н}}$  с учетом (13), (9) представляются в матричном виде

$$\{\Delta\varepsilon^{\text{Л}}\}_{4 \times 1} = [L]_{4 \times 2} \{w\}_{2 \times 1}; \quad \{\Delta\varepsilon^{\text{Н}}\}_{1 \times 4} = \{\vec{w}_{,\alpha} \vec{w}_{,\beta}\}_{1 \times 4}, \quad (15)$$

где  $\{\Delta\varepsilon^{\text{Л}}\}_{1 \times 4}^T = \{\Delta\varepsilon_{11} \Delta\varepsilon_{22} \Delta\varepsilon_{33} 2\Delta\varepsilon_{13}\}$ ;  $\Delta\varepsilon_{22} = (r^* - r)/r$ ;  $r^*$ ,  $r$  – радиусы вращения точек  $M^{t*}$  и  $M^t$  оболочки соответственно;  $\{\vec{w}_{,\alpha} \vec{w}_{,\beta}\}_{1 \times 4}^T = \{\vec{w}_{,1} \cdot \vec{w}_{,1} \vec{w}_{,2} \cdot \vec{w}_{,2} \vec{w}_{,3} \cdot \vec{w}_{,3} 2\vec{w}_{,1} \cdot \vec{w}_{,3}\}_{4 \times 2}$ ;  $[L]$  – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

#### 4. Соотношения между деформациями и напряжениями

Из опыта на простое растяжение образца из данного материала определяются истинные напряжения  $\sigma_1 = \frac{N}{F_{\text{д}}} = \sigma$  ( $F_{\text{д}}$  – площадь образца в деформированном состоянии) и логарифмические деформации  $\varepsilon_1 = \ln \frac{l_1}{l_0} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ln \frac{h_0}{h_1}$  ( $l_0, l_1, h_0, h_1$  – длина и размер квадратного поперечного сечения образца в исходном и деформированном состояниях соответственно). По этим данным строится диаграмма растяжения. Далее определяется функция поперечной деформации  $\omega = \frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|}$  и строится график ее зависимости от продольной деформации  $\varepsilon_1$ .

По результатам опыта определяются зависимости

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \omega)\varepsilon; \quad \sigma_i = \sigma; \quad \Delta\varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \omega)\Delta\varepsilon; \quad \Delta\sigma_i = \Delta\sigma, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформаций;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\Delta\varepsilon_i$  – приращение интенсивности деформаций;  $\Delta\sigma_i$  – приращение интенсивности напряжений, и строятся диаграмма деформирования и график зависимости функции поперечной деформации  $\omega$  от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$ .

По диаграммам растяжения и деформирования определяются и вводятся в рассмотрение следующие величины:

$E_{\text{ср}} = tg\alpha_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  – секущий модуль диаграммы растяжения;

$E_{\text{хр}} = tg\alpha_2 = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$  – хордовый модуль диаграммы растяжения;

$E_{\text{сд}} = tg\alpha_3 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$  – секущий модуль диаграммы деформирования;

$E_{\text{хд}} = tg\alpha_4 = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\varepsilon_i}$  – хордовый модуль диаграммы деформирования.

Между ними выполняются зависимости

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{3}(1 + \omega)E_{\text{сд}}; \quad E_{\text{хр}} = \frac{2}{3}(1 + \omega)E_{\text{хд}}. \quad (17)$$

Первые инварианты тензоров напряжений  $P(\sigma)$  и деформаций  $P(\varepsilon)$  определяются выражениями

$$P(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma; \\ P(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon(1 - 2\omega). \quad (18)$$

Между ними имеет место зависимость

$$P(\sigma) = \frac{E_{\text{ср}}}{1 - 2\omega} P(\varepsilon) = \frac{1 + \omega}{1 - 2\omega} E_{\text{сд}} P(\varepsilon). \quad (19)$$

Соотношения между первыми инвариантами тензоров приращений напряжений  $P(\Delta\sigma)$  и приращений деформаций  $P(\Delta\varepsilon)$  с использованием (16) запишутся выражениями

$$P(\Delta\sigma) = \frac{E_{\text{хр}}}{1 - 2\omega} P(\Delta\varepsilon) = \frac{1 + \omega}{1 - 2\omega} E_{\text{хд}} P(\Delta\varepsilon). \quad (20)$$

Вторые инварианты девиаторов напряжений  $I_2(D_\sigma)$  и деформаций  $I_2(D_\varepsilon)$  определяются соотношениями [15]

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{\sigma^2}{3};$$

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] = \frac{(1 + \omega)^2}{3}\varepsilon^2. \quad (21)$$

Определим инвариантные величины (16) в виде

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3}I_2(D_\varepsilon)} = \frac{1 + \omega}{\sqrt{3}}\varepsilon. \quad (22)$$

Напряженно - деформированное состояние нагруженного тела в точке  $M^t$  характеризуется тензорами напряжений и деформаций [15]

$$T_\sigma = \sigma_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j = \sigma^{ij}\vec{g}_i\vec{g}_j; \quad T_\varepsilon = \varepsilon_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j = \varepsilon^{ij}\vec{g}_i\vec{g}_j, \quad (23)$$

где  $\sigma_{ij}, \sigma^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений;  $\vec{g}_i, \vec{g}^i$  - ковариантные и контравариантные векторы базиса в произвольной точке;  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты тензора деформаций.

Тензорам напряжений и деформаций (23) соответствуют девиаторы напряжений  $D_\sigma$  и деформаций  $D_\varepsilon$  [15]

$$D_\sigma = S_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j = S^{ij}\vec{g}_i\vec{g}_j; \quad D_\varepsilon = E_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j = E^{ij}\vec{g}_i\vec{g}_j, \quad (24)$$

где  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}P(\sigma)g_{ij}$ ;  $S^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3}P(\sigma)g^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты девиатора напряжений;  $E_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}P(\varepsilon)g_{ij}$ ;  $E^{ij} = \varepsilon^{ij} - \frac{1}{3}P(\varepsilon)g^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты девиатора деформаций;  $g_{ij}, g^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора;  $P(\sigma) = \sigma_{ij}g^{ij} = \sigma^{ij}g_{ij}$  - первый инвариант тензора напряжений;  $P(\varepsilon) = \varepsilon_{ij}g^{ij} = \varepsilon^{ij}g_{ij}$  - первый инвариант тензора деформаций.

Вторые инварианты девиаторов напряжений и деформаций определяются выражениями [15]

$$I_2(S) = S^{ij}S_{ij}; \quad I_2(E) = E^{ij}E_{ij}. \quad (25)$$

Определим инвариантные величины (22) по формулам

$$\sigma_i = \sqrt{3S^{ij}S_{ij}}; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3}E^{ij}E_{ij}}. \quad (26)$$

Соотношения между напряжениями и деформациями определяются на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиатора напряжений компонентам девиатора деформаций в виде

$$S_{ij} = \phi E_{ij}; \quad S^{ij} = \phi E^{ij}, \quad (27)$$

где  $\phi = \frac{3}{2}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$  - функция пропорциональности, определяемая подстановкой (27) в (26), численное значение которой можно определить по построенному графику зависимости  $\sigma_i$  от  $\varepsilon_i$ .

С использованием значений функции  $\phi$  соотношения между напряжениями и деформациями (27) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2}E_{сд} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\omega}{1 - 2\omega}P(\varepsilon)g_{ij} \right). \quad (28)$$

Определение соотношений между компонентами тензора приращений напряжений и компонентами тензора приращений деформаций осуществляется с использованием гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений напряжений компонентам девиатора приращений деформаций в виде

$$\Delta S_{ij} = \psi \Delta E_{ij}; \quad \Delta S^{ij} = \psi \Delta E^{ij}, \quad (29)$$

где  $\Delta S_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \frac{1}{3}P(\Delta \sigma)g_{ij}$ ;  $\Delta S^{ij} = \Delta \sigma^{ij} - \frac{1}{3}P(\Delta \sigma)g^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты девиатора приращений напряжений;  $\Delta E_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}P(\Delta \varepsilon)g_{ij}$ ;  $\Delta E^{ij} = \Delta \varepsilon^{ij} - \frac{1}{3}P(\Delta \varepsilon)g^{ij}$  - ковариантные и контравариантные компоненты девиатора приращений деформаций;  $P(\Delta \sigma) = \Delta \sigma_{ij}g^{ij} = \Delta \sigma^{ij}g_{ij}$  - первый инвариант тензора приращений напряжений;  $P(\Delta \varepsilon) = \Delta \varepsilon_{ij}g^{ij} = \Delta \varepsilon^{ij}g_{ij}$  - первый инвариант тензора приращений деформаций.

Введем в рассмотрение инвариантные величины:  $\sigma_i^\Delta$  - интенсивность приращений девиаторных напряжений и  $\varepsilon_i^\Delta$  - интенсивность приращений девиаторных деформаций, которые определяются по формулам [15]

$$\sigma_i^\Delta = \sqrt{3\Delta S^{ij}\Delta S_{ij}}; \quad \varepsilon_i^\Delta = \sqrt{\frac{4}{3}\Delta E^{ij}\Delta E_{ij}}. \quad (30)$$

С использованием выражений (29) и (30) определяется функция пропорциональности  $\psi$ .

При решении упруго нелинейной задачи принимается равенство

$$\frac{\sigma_i^\Delta}{\varepsilon_i^\Delta} = \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta \varepsilon_i}. \quad (31)$$

С учетом равенства (31) функцию  $\psi$  можно заменить хордовым модулем диаграммы деформирования при определении приращений напряжений на  $(j+1)$ -ом шаге нагружения и представить в виде

$$\psi = \frac{3}{2}E_{\text{хд}}. \quad (32)$$

С учетом (32) выражения (29) примут вид

$$\Delta S_{ij} = E_{\text{хд}}\Delta E_{ij}; \quad \Delta S^{ij} = E_{\text{хд}}\Delta E^{ij}. \quad (33)$$

Свойство аддитивности ковариантных компонент тензора приращений деформаций  $\Delta \varepsilon_{ij}$  влечет аддитивность ковариантных компонент девиатора приращений деформаций  $\Delta E_{ij}$ . На основании первого выражения (33) аддитивными должны быть и величины  $\Delta S_{ij}$ , а следовательно и ковариантные компоненты тензора приращений напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$ .

Для преобразования (33) используется зависимость между первыми инвариантами тензоров приращений напряжений и деформаций в виде

$$P(\Delta \sigma) = \frac{1+\omega}{1-2\omega}E_{\text{хд}}P(\Delta \varepsilon). \quad (34)$$

С учетом (34) из (33) получается

$$\Delta \sigma_{ij} = \frac{3}{2}E_{\text{хд}} \left( \Delta \varepsilon_{ij} + \frac{\omega}{1-2\omega}P(\Delta \varepsilon)g_{ij} \right). \quad (35)$$

На основании вышеизложенных соотношений составляются матричные соотношения

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}; \quad \{\Delta \sigma\} = [C]\{\Delta \varepsilon\}, \quad (36)$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \ \sigma^{22} \ \sigma^{33} \ \sigma^{13}\}$ ;  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{13}\}$ ;

$[C]$  - матрица податливости материала;

$\{\Delta \sigma\}^T = \{\Delta \sigma^{11} \ \Delta \sigma^{22} \ \Delta \sigma^{33} \ \Delta \sigma^{13}\}$ ;  $\{\Delta \varepsilon\}^T = \{\Delta \varepsilon_{11} \ \Delta \varepsilon_{22} \ \Delta \varepsilon_{33} \ 2\Delta \varepsilon_{13}\}$ .

### 5. Матрица деформирования конечного элемента на шаге нагружения

Дискретный элемент выбирается в форме кольца с поперечным сечением в виде произвольного четырехугольника с узлами  $i, j, k, l$ . Узловыми неизвестными конечного элемента принимаются приращения перемещений и приращения деформаций. Глобальные координаты  $s, t$  четырехугольника выражаются через его узловые значения билинейными соотношениями

$$s = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{s_y\}; \quad t = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{t_y\}, \quad (37)$$

где  $\{s_y\}^T = \{s^i \ s^j \ s^k \ s^l\}$ ;  $\{t_y\}^T = \{t^i \ t^j \ t^k \ t^l\}$  – строки узловых значений координат.

Дифференцированием (37) определяются производные глобальных координат в локальной системе  $s, \xi, s, \eta, t, \xi, t, \eta$  и производные локальных координат в глобальной системе  $\xi, s, \xi, t, \eta, s, \eta, t$  [13].

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через векторы перемещений узловых точек также билинейными соотношениями [13]

$$\vec{w} = \{\phi(\xi, \eta)\}^T \{\vec{w}_y\}, \quad (38)$$

где  $\{\vec{w}_y\}^T = \{\vec{w}^i \ \vec{w}^j \ \vec{w}^k \ \vec{w}^l\}$ .

Производные вектора (38) определяются выражениями

$$\vec{w}_{,s} = \{\phi_{,s}\}^T \{\vec{w}_y\}; \quad \vec{w}_{,t} = \{\phi_{,t}\}^T \{\vec{w}_y\}. \quad (39)$$

Вектор перемещения узловой точки конечного элемента имеет вид

$$\vec{w}^\omega = w^{1\omega} \vec{g}_1^{0\omega} + w^{3\omega} \vec{g}_3^{0\omega}, \quad (\omega = i, j, k, l). \quad (40)$$

Базисные векторы узловой точки  $\omega$  выражаются через базисные векторы внутренней точки конечного элемента зависимостью

$$\{\vec{g}_{2 \times 1}^{0\omega}\} = [n^\omega] \{\vec{g}^0\}. \quad (41)$$

С учетом (40) и (41) зависимости (38) и (39) примут вид

$$\vec{w} = \{\vec{g}^0\}^T \begin{bmatrix} \phi_1(\xi, \eta) [n^i]_{2 \times 2}^T & \phi_2(\xi, \eta) [n^j]_{2 \times 2}^T \\ \phi_3(\xi, \eta) [n^k]_{2 \times 2}^T & \phi_4(\xi, \eta) [n^l]_{2 \times 2}^T \end{bmatrix} \{w_y\}; \quad (42)$$

$$\vec{w}_{,s} = \{\vec{g}^0\}^T \begin{bmatrix} \phi_{1,s}(\xi, \eta) [n^i]_{2 \times 2}^T & \phi_{2,s}(\xi, \eta) [n^j]_{2 \times 2}^T \\ \phi_{3,s}(\xi, \eta) [n^k]_{2 \times 2}^T & \phi_{4,s}(\xi, \eta) [n^l]_{2 \times 2}^T \end{bmatrix} \{w_y\}; \quad (43)$$

$$\vec{w}_{,t} = \{\vec{g}^0\}^T \begin{bmatrix} \phi_{1,t}(\xi, \eta) [n^i]_{2 \times 2}^T & \phi_{2,t}(\xi, \eta) [n^j]_{2 \times 2}^T \\ \phi_{3,t}(\xi, \eta) [n^k]_{2 \times 2}^T & \phi_{4,t}(\xi, \eta) [n^l]_{2 \times 2}^T \end{bmatrix} \{w_y\},$$

где  $\{w_y\}^T = \{w^{1i} \ w^{3i} \ w^{1j} \ w^{3j} \ w^{1k} \ w^{3k} \ w^{1l} \ w^{3l}\}$ ;  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  – функции, являющиеся элементами аппроксимирующей матрицы  $\{\phi(\xi, \eta)\}^T$ .



При скалярной аппроксимации матрица  $[G]$  имеет вид

$$[G]_{4 \times 16} = \begin{bmatrix} \{\phi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\phi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\phi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{\phi\}^T \end{bmatrix}.$$

Функционал Лагранжа, выражающий равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения, можно записать в виде [14]

$$\begin{aligned} \Pi_L = \int_V \left[ \{\sigma\}^T + \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \right] [\{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\} + \{\Delta\varepsilon^{\text{Н}}\}] dV - \\ - \int_S \{w\}^T \left[ \{p\} + \frac{1}{2} \{\Delta p\} \right] dS, \end{aligned} \quad (53)$$

где  $V$  – объем деформируемого тела;  $S$  – площадь поверхности с заданной внешней нагрузкой;  $\{p\}^T = \{p_1 \ p_2\}$ ;  $\{\Delta p\}^T = \{\Delta p_1 \ \Delta p_2\}$  – векторы нагрузок после  $j$ -го и  $(j+1)$ -го шагов соответственно.

Заменим выражение действительной работы внутренних сил в (53) разностью их возможной и дополнительной работ [14]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{\Delta\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon\} &= \{\Delta\sigma\}^T [L] \{w\} - \frac{1}{2} \Phi(\sigma) = \\ &= \{\Delta\varepsilon\}^T [D] [L] \{w\} - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\}^T [D] \{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\}. \end{aligned} \quad (54)$$

С учетом (54) функционал (53) примет вид .

$$\begin{aligned} \Pi_L = \int_V \{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\}^T [D] [L] \{w\} dV + \int_V \{\sigma\}^T \{\Delta\varepsilon^{\text{Н}}\} dV - \\ - \frac{1}{2} \int_V \{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\}^T [D] \{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\} dV - \frac{1}{2} \int_S \{w\}^T \{\Delta p\} dS - \\ - \int_S \{w\}^T \{p\} dS + \int_V \{\Delta\varepsilon^{\text{П}}\}^T \{\sigma\} dV. \end{aligned} \quad (55)$$

Функционал (55) с учетом (52) и (45) для отдельного конечного элемента на шаге нагружения принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{LE} \equiv \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 16}^T \int_V [G]_{16 \times 4}^T [D]_{4 \times 4} [B]_{4 \times 8} dV \{w_y\}_{8 \times 1} + \{w_y\}_{1 \times 8}^T [K_{\text{Н}}]_{8 \times 8} \{w_y\}_{8 \times 1} - \\ - \frac{1}{2} \{\Delta\varepsilon_y\}_{1 \times 16}^T \int_V [G]_{16 \times 4}^T [D]_{4 \times 4} [G]_{4 \times 16} dV \{\Delta\varepsilon_y\}_{16 \times 1} - \frac{1}{2} \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]_{8 \times 2}^T \{\Delta p\}_{2 \times 1} dS - \\ - \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_S [A]_{8 \times 2}^T \{p\}_{2 \times 1} dS + \{w_y\}_{1 \times 8}^T \int_V [B]_{8 \times 4}^T \{\sigma\}_{4 \times 1} dV, \end{aligned} \quad (56)$$

где  $\{K_{\text{Н}}\}_{8 \times 8}$  – матрица от нелинейной части приращения деформаций.

Выполняя варьирование функционала (56) по узловым неизвестным  $\{\Delta\varepsilon_y\}^T$  и  $\{w_y\}^T$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{LE}}{\partial \{\Delta\varepsilon_y\}^T} \equiv - [H] \{\Delta\varepsilon_y\} + [Q] \{w_y\} = 0; \\ \frac{\partial \Pi_{LE}}{\partial \{w_y\}^T} \equiv [Q]^T \{\Delta\varepsilon_y\} + [K_H] \{w_y\} + \{f\} = 0, \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \text{где } [Q] &= \int [G]^T [D] [B] dV; \\ & \begin{matrix} 16 \times 8 & & & \\ & V & 16 \times 4 & 4 \times 4 & 4 \times 8 \end{matrix} \\ [H] &= \int [G]^T [D] [G] dV; \\ & \begin{matrix} 16 \times 16 & & & \\ & V & 16 \times 4 & 4 \times 4 & 4 \times 16 \end{matrix} \\ \{f\} &= \int [A]^T \{\Delta p\} dS - \int [B]^T \{\sigma\} dV + \int [A]^T \{p\} dS. \\ & \begin{matrix} 8 \times 1 & & & & & & & \\ & S & 8 \times 2 & 2 \times 1 & & & & \\ & & & & V & 8 \times 4 & 4 \times 1 & \\ & & & & & S & 8 \times 2 & 2 \times 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Систему (57) можно представить в традиционной конечно-элементной форме

$$[k] \{Z_y\} = \{F\}, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \text{где } [k] &= \begin{bmatrix} [H] & [Q] \\ [Q]^T & [K_H] \end{bmatrix} \begin{matrix} 16 \times 16 & 16 \times 8 \\ 8 \times 16 & 8 \times 8 \end{matrix} - \text{матрица деформирования конечного элемента;} \\ \{Z_y\}^T &= \{ \{\Delta\varepsilon_y\}^T \{w_y\}^T \} \begin{matrix} 1 \times 24 & 1 \times 16 & 1 \times 8 \end{matrix} - \text{вектор узловых неизвестных конечного элемента;} \\ \{F\}^T &= \{ \{0\}^T \{f\}^T \} \begin{matrix} 1 \times 24 & 1 \times 16 & 1 \times 8 \end{matrix} - \text{вектор узловых усилий конечного элемента на шаге} \\ & \text{нагружения.} \end{aligned}$$

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [16].

## 6. Пример расчета

Рассматривалось напряженно-деформированное состояние усеченной сферической оболочки, находящаяся под действием внутреннего давления интенсивности  $q$ . Принимались следующие исходные данные: радиус внутренней поверхности  $R = 0.25$  м, толщина стенки оболочки  $t = 0.002$  м, расстояние от центра оболочки до плоскости усечения  $l = 0.2$  м, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Материал оболочки нелинейно упругий, диаграмма деформирования которого описывается зависимостью  $\sigma_i = a\varepsilon_i^2 + b\varepsilon_i$ , где  $a = -1839743,5897$  МПа,  $b = 115384,6154$  МПа.

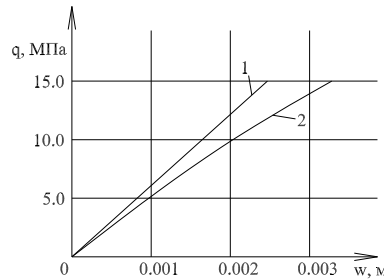


Рис. 2. Зависимость нормального перемещения от интенсивности давления

На рис. 2 показана зависимость нормального перемещения  $w$  точки внутренней поверхности оболочки, расположенной на оси симметрии, от интенсивности давления  $q$  (кривая 2). Прямая 1 показывает линейное решение.

При перемещении, превышающем почти в 2 раза толщину оболочки, условие равновесия по напряжениям выполнялось с точностью  $\approx 2\%$ . Полученные результаты свидетельствуют о корректности разработанного алгоритма.

### Summary

*N.A. Gureeva, Yu.V. Klotchkov, A.P. Nikolaev*

Calculation of nonlinear elastic axially loaded shells of revolution based on the mixed FEM.

Calculation of nonlinear shell elastic isotropic material is step method of loading. The shell is considered in three states: initial, deformed following the  $j$  steps of loading and nearby, close to the deformed as a result  $(j + 1)$  – the first load step. Deformation defined as the half-metric tensor components. The relation between stress and strain increments of stress and strain increments are obtained on the basis of hypotheses about the proportionality of deviators component stresses and strains and the components of the deviators increments of stress and strain increments. On the basis of the previously prepared mixed functional formed in Step deformation loading matrix surround annular end member with a quadrangular cross-section. An example of calculating.

**Key words:** vector approximation, tensor approximation of the vector field, tensor field, the mixed formulation, a variational principle.

### Литература

- 1 Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника. – 1991. – 656 с.
- 2 Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука. – 1988. – 232 с.
- 3 Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. – Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та. – 1985. – 164 с.
- 4 Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука. – 1978. – 360 с.
- 5 Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н., Нух Н.М. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. – Казань: ИМРАН. – 1993. – 206 с.
- 6 Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит. – 2006. – 392 с.
- 7 Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. – М.: Физматлит. – 2008. – 400 с.
- 8 Николаев А.П., Клочков Ю. В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек. - Волгоград : Волгоградский ГАУ. – 2012. – 264 с.
- 9 Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.- М.: Мир. – 1976. – 464 с.
- 10 Агапов В.П., Васильев А.В., Соснин А.В. Разработка и реализация восьмиугольного конечного элемента для расчета массивных конструкций с учетом пластических деформаций// Строит. мех. и расчет сооруж. – 2013. – №4. – С. 71-73.
- 11 Баженов В.А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури.- К.: ЗАТ "Віпол". – 2010. – 316 с.
- 12 Батэ К.-Ю. Методы конечных элементов.- М.: Физматлит. – 2010. – 1022 с.
- 13 Гуреева Н.А. Использование аппроксимации тензорных полей в МКЭ при расчете осесимметрично нагруженных оболочек вращения// Изв.вузов. Строительство. – 2009. – №2. – С. 17-23.
- 14 Гуреева Н.А., Арьков Д.П. Реализация деформационной теории пластичности в расчетах плосконапряженных пластин на основе МКЭ в смешанной формулировке// Изв.вузов. Сев.-Кав. регион. Сер.Ест.Науки. – 2011. – №2. – С. 12-15.
- 15 Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука. – 1976. – Т.1,2. – 536 с.

16 *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение. – 1974. – 344 с.

---

**Гуреева Наталья Анатольевна** – Кандидат технических наук, доцент кафедры "Высшая математика Волгоградский государственный аграрный университет

E-mail: *natalya-gureeva@yandex.ru*

**Клочков Юрий Васильевич** – Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Высшая математика Волгоградский государственный аграрный университет

E-mail: *Klotchkov@bk.ru*

**Николаев Анатолий Петрович** – Доктор технических наук, профессор кафедры "Лесное и водное хозяйство Волгоградский государственный аграрный университет

E-mail: *anpetr40@yandex.ru*