О тьюринговых степенях в утончениях арифметической иерархии

В. Л. Селиванов, М. М. Ямалеев

В.Л. Селивановым [**1**] в 1983 г. была введена тонкая иерархия арифметических множеств, каждый уровень Σ_α которой однозначно определяется ординалом $\alpha < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \lim\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$. Некоторые уровни тонкой иерархии совпадают с хорошо изученными уровнями известных иерархий множеств (разностная иерархия Ершова [**2**]-[**4**], ариммфметическая иерархия). Например, $\Sigma_n = \Sigma_n^{-1}$, $\Sigma_{\omega^n} = \Sigma_n^{-1,\emptyset'}$, $\Sigma_\omega = \Sigma_2^0$, $\Sigma_{\omega^\omega} = \Sigma_3^0$. Б. Купером в 1971 было показано, что в иерархии Ершова уже второй уровень является собственным (т.е. не содержит элементов из меньших уровней) для тьюринговых степеней. Для общего случая К. Джокушем/Р. Шором [**5**] и В.Л. Селивановым [**6**] независимо было показано, что каждый уровень иерархии Ершова уровень будет собственным для тьюринговых степеней.

Аналогичные вопросы возникают и для тонкой иерархии. Нетрудно показать, что классы Σ_ω и Σ_λ, где $\omega < \lambda < \omega^\omega$, неразличимы относительно тьюринговой эквивалентности, для множеств $\geq_T \emptyset'$. При этом $\Sigma_{\omega^2} \not\approx_T \Sigma_\omega$ согласно релятивизованной теореме Купера. В данной работе показано, что наименьший “новый” собственный уровень тонкой иерархии — это уровень $\Sigma_{\omega+2}$, т.е. $\Sigma_{\omega+2} \not\approx_T \Sigma_\omega$ и $\Sigma_{\omega+1} \approx_T \Sigma_\omega$. Другими словами, основным результатом является

Теорема. *Существует в.п. множество E, существуют непересекающиеся в.п. множества $E_0, E_1 \subset E$, существует Σ_2^0 множество $A \subset E_0$, существует Π_2^0 множество $B \subset E_1$ такие, что множество $A \cup B \cup C$, где $C = E - (E_0 \cup E_1)$, не эквивалентно по Тьюрингу никакому Σ_2^0-множеству.*

Как следствие получаем, что собственные тьюринговые степени уровня $\Sigma_{\omega+2}$ не сравнимы с $\mathbf{0}'$. Кроме того, приведенная в теореме конструкция является одной из первых, которая строит вычислимые приближения множеств, работая в оракулах функционалов с Σ_2^0 и Π_2^0 множествами.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Ямалеев М.М. поддержан грантами РФФИ 15-01-08252, 16-31-50048, Госзаданием 1.2045.2014.

Список литературы

[1] Селиванов В. Л. Иерархии гиперарифметических множеств и функций. // Алгебра и логика, Т.22, 6 (1983), 666–692.
[2] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств. // Алгебра и логика, Т.7, 1 (1968), 47–74.
[3] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств II. // Алгебра и логика, Т.7, 4 (1968), 15–47.
[4] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств III. // Алгебра и логика, Т.9, 1 (1970), 34–51.
[5] Josckush C. G., Shore R. Pseudo jump operators II: Transfinite iterations, hierarchies and minimal covers. Journal of SYmbolic Logic, V. 49, 4 (1984), 1205–1236.
[6] Селиванов В. Л. Об иерархии Ершова, // Сибирский математический журнал, Т. 26 (1985), 134–149.

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск
E-mail: vseliv@iis.nsk.su
Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru, marsiam@yandex.ru