Е. М. Вечтомов

Вятский государственный гуманитарный университет,
vecht@mail.ru

К СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛУКОЛЕЦ И ПОЛУТЕЛ

Полукольцом (в широком смысле) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя ассоциативными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, связанными законами дистрибутивности умножения относительно сложения. Полукольцо называется *полутелом*, если его мультипликативная полугруппа является группой. Класс всех полуколец образует многообразие алгебр типа $(2, 2)$ с четырьмя тождествами (аксиомами). Полутела также образуют многообразие — но только в классе алгебр типа $(2, 2, 1, 0)$ в сигнатуре $+, \cdot, ^{-1}, 1$, задаваемое восемью тождествами. Класс полуколец весьма широк; наряду с полутелами он содержит все дистрибутивные решетки и все ассоциативные кольца. К полукольцам примыкают почтикольца, которые аддитивно являются группами и удовлетворяют одному из законов дистрибутивности.

Как правило, определение полукольца включает существование аддитивного нуля 0 (нейтрального элемента по сложению), являющегося к тому же мультипликативным нулем (тождественно $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$). Именно такую структуру будем называть *полукольцом*. Каждое полукольцо вкладывается в полукольцо с единицей 1 (нейтральным элементом по умножению). В 1950-е годы стали изучаться и последние 30 лет достаточно активно изучаются полукольца с коммутативным сложением (см. книги Голана, в частности, [1]). Для полуколец с коммутативным сложением естественным образом строится кольцо разностей (возможно, тривиальное); если такое полукольцо аддитивно сократимо (т. е. удовлетворяет квазитождеству $x+z=y+z \Rightarrow x=y$), то оно вкладывается в свое кольцо разностей. Возникает аналогичный вопрос о связи полуколец с почтикольцами.

Тематика теории полуколец неисчерпаема. Но до конца не исследованными остаются многие естественные задачи, относящиеся, казалось бы, к самым основам теории полуколец. К таким задачам принадлежит вопрос о строении однопорожденных полуколец и, в частности, конечных циклических полуколец. Полукольцо называется *циклическим*, если все его элементы, возможно, кроме 0 и 1, являются натуральными степенями некоторого одного его элемента (образующего). Заметим, что бесконечные циклические полукольца устроены просто (см. материалы А.С. Бестужева и И.В. Лубягиной о циклических полукольцах с коммутативным и с некоммутативным сложением [2]).

К изучению полуколец с коммутативным сложением (как и к кольцам) может быть применен функциональный подход, когда полукольцо S представляется в виде полукольца сечений некоторого пучка полуколец S_x над топологическим пространством X (см. докторскую диссертацию В.В. Чермных "Функциональные представления полуколец и полумодулей", 2007 г.). Обычно рассматриваются структурные пучки факторполуколец S_x исходного полукольца S над различными его спектрами. Выявлены и охарактеризованы классы полуколец, допускающих изоморфные пучковые представления в тех или иных структурных пучках.

Последние два десятилетия изучаются полумодули над полукольцами (С.Н. Ильин, Е. Кацов, О. Сократова, В.В. Чермных и др.). В частности, исследуются гомологические свойства полумодулей, связи полукольца с категорией полумодулей над ним (см., скажем, [3]). Линейной алгеброй над полукольцами занимается А.Э. Гутерман.

Понятие полутела определено Вейнертом (Weinert H.J.) в 1962 г. Далее будем говорить только о полутелах с коммутативным сложением. Вейнерт показал, что аддитивно идемпотентные полутела (с тождеством $x + x = x$) совпадают с решеточно упорядоченными группами. С.В. Полин в 1974 г. установил, что полутела являются упорядоченными алгебраическими системами относительно разностного порядка. Хатчинс (Hutchins Y.C.) и Вейнерт (1990 г.) изучали общие свойства ядер (конгруэнций) полутел. В последнее десятилетие конгруэнции и решетку ядер полутел исследовали И.И. Богданов, В.И. Варанкина, Е.М. Вечтомов, М.А. Лукин, А.В. Михалёв, А.В. Ряттель, А.Н. Семёнов, О.В. Старостина, А.В. Черанева, Д.В. Чупраков. Введены понятия образующей полутела и ограниченного полутела. Полутело называется *ограниченным*, если оно как ядро порождается элементом $1 + 1$. Ограниченные полутела аддитивно сократимы. Доказана важная структурная теорема о том, что любое полутело является расширением ограниченного полутела при помощи аддитивно идемпотентного полутела. Установлено, что дополняемые элементы решетки ядер полутела образуют в ней булеву подрешетку. Этот факт позволил построить аналог пучка Пирса для полутел и применить его к описанию бирегулярных полутел (полутел, главные ядра которых дополняемы). Получена спектральная теорема, утверждающая, что компактность неприводимого спектра полутела эквивалентна существованию образующей в этом полутеле. Заложены основы функциональных (пучковых) представлений полутел (см. [4], [5]). Полутела находят применение в общей теории полуколец (см., например, [6], [7]). Числовые идемпотентные полутела служат фундаментом идемпотентного анализа, развиваемого В.П. Масловым и его учениками. Структурная теория полутел находится в состоянии становления. Здесь масса нерешенных вопросов. Например, всякое ли аддитивно сократимое полутело изоморфно вкладывается в некоторое аддитивно сократимое полутело с образующей? Известно, что существуют аддитивно сократимые полутела, не вложимые в ограниченные полутела [8].

Заметное место в теории полуколец занимает изучение полуколец непрерывных функций. Это, в частности, обусловлено применением к полукольцам метода функциональных представлений. В последнее время интенсивно исследуются конгруэнции [9], [10] и подалгебры [11] в полукольцах непрерывных неотрицательных функций, заданных на топологических пространствах. В этом направлении получены новые интересные результаты. Так, в сборнике [2] опубликованы тезисы докладов В.В. Сидорова — о решеточных изоморфизмах однопорожденных подалгебр полуколец непрерывных функций, Е.Н. Лубягиной — о простых идеалах в полукольцах непрерывных функций со значениями в единичном отрезке, Н.В. Шалагиновой — о полукольцах ростков непрерывных неотрицательных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Golan J.S. *Semirings and their applications.* – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 380 p.

2. *Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 40.* – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2010. – 385 с.

3. Ильин С.Н. *О применении к полукольцам двух теорем теории колец и модулей* // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83. – Вып. 4. – С. 536-544.

4. Вечтомов Е.М., Черанева А.В. *Полутела и их свойства* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14. – № 5. – С. 3-54.

5. Вечтомов Е.М. *Строение полутел* // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Вып. 10. – С. 3-42 (аналитический научный обзор, поддержанный грантом РФФИ, № 08-01-11000-ано).

6. Вечтомов Е.М., Старостина О.В. *Структура абелево-регулярных положительных полуколец* // УМН. – 2007. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 199-200.

7. Лукин М.А. *О полукольцевых объединениях кольца и полутела* // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 12. – С. 76-80.

8. Вечтомов Е.М., Черанева А.В. *Полутела с образующей* // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. Механика. Комп. науки. – 2009. – № 3. – С. 25-33.

9. Вечтомов Е.М., Чупраков Д.В. *О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 85. – Вып. 6. – С. 803-816.

10. Чупраков Д.В. *Условия дистрибутивности решеток конгруэнций полуколец непрерывных функций* // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. Механика. Комп. науки. – 2009. – № 3. – С. 128-134.

11. Вечтомов Е.М., Сидоров В.В. *Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр* // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Серия 1: Матем. Механика. Информатика. – 2010. – Вып. 11. – С. 112-125.